

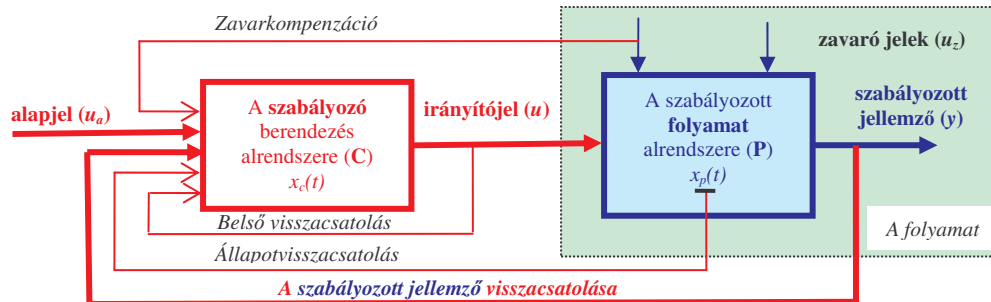
Szilágyi Béla Juhász Ferencné

Szabályozástechnika
A dinamikus rendszer matematikai modellje
Alaptagok és alapstruktúrák

A cikksorozat elkészítését és elérhetőségét támogatja az „Ipar a korszerű mérnökképzésért” alapítvány.

1. A dinamikus rendszer matematikai modellje

A szabályozási rendszer alrendszerei – mint ahogy azt már korábban is tárgyaltuk – a *szabályozott folyamat* (Process, **P**), és a *szabályozó berendezés* (Controller, **C**), amelyek – egymással soros-, és visszacsatolt struktúrát alkotva – erős kölcsönhatásban működnek együtt. Az alrendszerek egyedi jelátviteli tulajdonságait, az egymással kapcsolatos kölcsönhatásait jelátvivő tagokkal, absztrahált formában írjuk le. A rendszer hatásvázlatát az 1. ábra mutatja.



1. ábra.
A szabályozás alrendszerei

Ezen a vázlaton a *beavatkozó szervet*, a *végrehajtó szervet*, és a *teljesítményerősítőt* a folyamat részének tekintjük. Az y szabályozott jellemző a folyamat (**P**) x_p állapotváltozóinak, az u irányító jelnek és az u_z zavaró jeleknek az $y = g_p(x_p, u, u_z)$ függvényei. Az irányító jelet a szabályozási algoritmusnak megfelelően a szabályozó berendezés állítja elő. A szabályozó berendezést absztraháló tag (**C**) a rendszer hatásvázlat struktúrájának x_c állapotváltozókkal rendelkező dinamikus alrendszere. A szabályozási algoritmus kialakításában az y szabályozott jellemzőről történő *fő visszacsatolás* mellett, visszacsatolás létesíthető a folyamat x_p állapotváltozóiról (*állapotvisszacsatolás*) és az u irányító jelről (*belső visszacsatolás*), ezek célja a rendszer minőségjavítása. A visszacsatolásokon túlmenően az algoritmusképzésbe (az u irányító jel meghatározásának eljárásába) bevonható az u_z zavaró jelek egy részhalmaza is (*zavarkompenzáció*). Mindezek következményeként az irányító jelet meghatározó implicit függvény $u = g_c(u_a, y, x_c, x_p, u_z, u)$.

A hatásvázlat egyes tagjai (a **P** és **C** alrendszerek) bemenő- és kimenő jelekkel (független- és függő változókkal) rendelkeznek. A jelek különféle fizikai mennyiségek értékei és értékváltozásai, és a t időváltozónak is a függvényei. A kimenő- és bemenő jelek közötti függvénykapcsolat rendszerint egy időszerinti **differenciálegyenlet**- és az ezt kísérő algebrai egyenlet formájában állítható elő. A differenciálegyenlet azt fejezi ki, hogy egy adott bemenő jelre és ennek változásaira az $x(t)$ állapotváltozó milyen módon (általában milyen *időkésleltetéssel*) reagál. Ez az *időkésleltetés* az *eredő rendszer dinamikájára is alapvető befolyást gyakorol és rendszerint „minden probléma forrása”*.

A *folyamatok* egy részénél az u irányító jel megváltozására az x_p állapotváltozó és az y szabályozott jellemző csak egy T_h ún. *holtidő* eltelte után reagál. A késleltetésnek ez a típusa több időállandó egymásra történő torlódásából (látszólagos holtidő)-, vagy a jelterjedés véges sebességéből (valóságos holtidő) származtatható és jelentős nehézségek okozójává válhat. A holtidős folyamat esetében az u irányító jel megváltozásának bekövetkezése után T_h ideig „nem történik semmi”, ezért ha az y szabályozott jellemző és a folyamat x_p állapotváltozó a $0 < t < T_h$ időintervallumban nem változnak, akkor sem az állapotvisszacsatolás, sem a szabályozott jellemző visszacsatolásának a hatása nem tud ezen idő alatt érvényre jutni. A holtidős folyamatok kezelése mindezek miatt a szabályozás tervezőjétől fokozott figyelmet kíván.

Dinamikus rendszer állapotegyenlete

A j számú bemenettel, k számú kimenettel, n számú állapotváltozóval rendelkező **MIMO** (Multi Input, Multi Output, több bemenetű, több kimenetű, n -ed rendű) dinamikus rendszer matematikai modelljének egy lehetséges általános alakja (a rendszer nemlineáris **állapotegyenlete**):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\ y_1(t) &= g_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\ &\vdots \\ y_k(t) &= g_k[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)]\end{aligned}$$

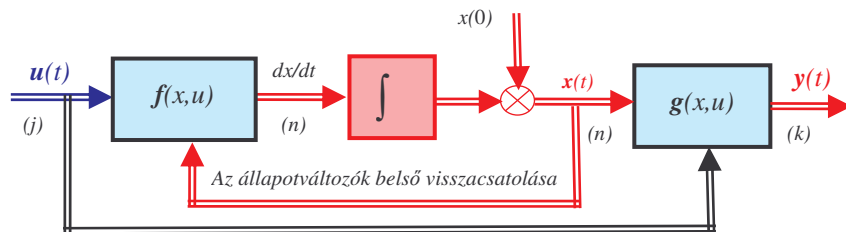
Ez az egyenletrendszer n számú, *elsőrendű közönséges differenciálegyenletet*, és k számú *nemlineáris algebrai egyenletet* tartalmaz. A megoldandó feladat rendszerint az, hogy adott $u(t)$ gerjesztés, és az állapotváltozók $x(0)$ kezdeti feltételei mellett, ismert f és g függvények esetében meg kell határozni az $y(t)$ kimenő jelet (az $u(t)$ gerjesztésre adott $y(t)$ *választ*). E kérdéskörben elsődleges szerepe a differenciálegyenletrendszer $x(t)$ megoldásának van, mert $x(t)$ és $u(t)$ ismeretében $y(t)$ kiszámítása már csupán egy algebrai művelet. Bevezetve a mátrixalgebrában használt

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix}$$

oszlopvektor jelöléseket, az n számú elsőrendű, közönséges differenciálegyenletből, és k számú algebrai egyenletből álló egyenletrendszer vektor–differenciálegyenlet formájában is felírható. Ennek alakja:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f[x(t), u(t)] \\ y(t) &= g[x(t), u(t)]\end{aligned}$$

ahol $x(t)$: az **állapotváltozó** vektor ($n \times 1$), $dx(t)/dt$: az **állapotsebesség** vektor ($n \times 1$), $u(t)$: a **bemenőjel** (gerjesztés) vektor ($j \times 1$), $y(t)$: a **kimenőjel** (válasz) vektor ($k \times 1$). Az állapotegyenletet – a mérnöki szemléletmódhoz a képletekhez képest közelebb álló, de azzal egyenértékű – hatásvázlattal is szemléltethetjük (lásd 2a. ábra):



2a. ábra.

Dinamikus rendszer állapotegyenletét szemléltető hatásvázlat

A hatásvázlaton az $f(x,u)$ és $g(x,u)$ függvényeket absztraháló tagok **algebrai** függvénykapcsolatot fejeznek ki a közvetlen bemenő-, és kimenő jelek között, aminek jelentése az, hogy $u(t)$, $x(t)$ bemenő jeleik megváltozására, a $dx(t)/dt$ illetve $y(t)$ kimenő jeleik megváltozásával, *késleltetés nélkül* (azonnal) reagálnak. Az **integráló tag** a hatásvázlat **dinamikus** tagja, $x(t)$ kimenő jele a $dx(t)/dt$ bemenő jelének az idő szerinti integrálja. Ebből következik, hogy az integráló tag – véges értékű bemenőjel változás hatására keletkező – kimenő jelének megváltozásához időre van szükség. A hatásvázlat szemléletesen jeleníti meg a dinamikus rendszer jelei közötti ok–hatás viszonyokat és állapotváltozóinak **belső visszacsatolását** is¹.

Ennek az általános rendszermodellnek egy speciális esete, amikor az $f(x,u)=Ax(t)+Bu(t)$; $g(x,u)=Cx(t)+Du(t)$ lineáris függvények. Ez a lehetséges rendszermodell egy osztálya (**LTI** – **Linear Time-Invariant**, lineáris idő-invariáns, kauzális² rendszer). Koordinátákban felírható matematikai kifejezése a

¹ A tagokat összekötő, és a **jeleket** szimbolizáló nyíllal ellátott kettős vonalak a **hatásirányt** (az ok–okozat relációt) jelölik, illetve azt érzékeltetik, hogy minden tagnak több bemenő-, és több kimenő jele is lehet.

² **Linearitás**: a $dx(t)/dt$ állapotsebesség valamint az $y(t)$ kimenő jel az $x(t)$ állapotváltozó és az $u(t)$ bemenő jel A , B , C , D paramétermátrixokkal súlyozott lineáris kombinációja. **Időinvariancia**: a gerjesztés $u(t-T)$ időbeli $T>0$ eltolása csak egy ugyanekkora eltolást okoz az $y(t-T)$ válaszban. **Kauzalitás**: bármely belépő gerjesztéshez ($u(t)=0$, ha $t<0$) belépő válasz ($y(t)=0$, ha $t<0$) tartozik.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{k1} & \cdots & d_{kj} \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

egyenletrendszer³, a dinamikus tag **lineáris állapotegyenlete**. Általános esetben minden egyes $dx_i(t)/dt$ állapotsebesség ($i:1,2, \dots, n$), és minden egyes $y_i(t)$ kimenőjel ($i:1,2, \dots, k$) az n számú állapotváltozó-, és a j számú bemenő jel mindegyikének a függvénye, ezek súlyozott, lineáris kombinációja. Felhasználva a mátrixalgebrában használt fogalmakat, és jelöléseket, a koordinátákban adott függvénykapcsolatoknak egy tömörített alakja a

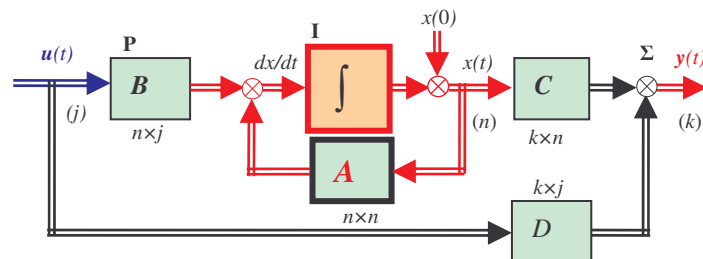
$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

állapotegyenlet. Ebben **A**: ($n \times n$) méretű **négyzetes állapotmátrix**, **B**: ($n \times j$) méretű **bemeneti mátrix**, **C**: ($k \times n$) méretű **kimeneti mátrix**, **D**: ($k \times j$) méretű **direkt mátrix** (**A**, **B**, **C**, **D**: a paramétermátrixok).

A **lineáris** rendszerre érvényes a **szuperpozíció** elve⁴. A lineáris szabályozási rendszerek tárgyalása során lineáris állapotegyenlettel jellemzzük a szabályozott folyamatot, a szabályozó berendezést, és a teljes, visszacsatolásokot tartalmazó eredő rendszert is⁵. A szuperpozíció elvének alapján az alapjelre és a zavaró jelekre külön, külön vizsgálhatjuk a rendszer dinamikus tulajdonságait, és ha ezek a gerjesztések egyidejűleg lének fel a rendszer bemenetein, akkor a részválaszok összegeként kaphatjuk a rendszer eredő választ.

A lineáris rendszer állapotegyenletéhez is hozzárendelhető egy hatásvázlat (lásd 2b. ábra), amelynek alkotó elemei az **arányos** (**P**, proporcionális)–, az **összegző** (**Σ**)–, és az **integráló** (**I**) tulajdonságokkal rendelkező lineáris **alaptagok**⁶. Ez a hatásvázlat is az állapotegyenlettel egyenértékűen szemlélteti a dinamikus rendszer jelátviteli tulajdonságait, a jelek közötti oksági viszonyokat, és a jelterjedés hatásmechanizmusát. Dinamikus eleme az integráló alaptag.



2b. ábra.

A lineáris rendszer állapotegyenletéhez rendelhető hatásvázlat

³ Ez az állapotegyenlet a lineáris **MIMO** tagot leíró matematikai rendszermodell, n darab elsőrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletet és k darab lineáris algebrai egyenletet tartalmaz. Általában a $dx(t)/dt = f[x(t), u(t)]$, $y(t) = g[x(t), u(t)]$ egyenletekkel jellemezhető nemlineáris kapcsolatot van a $dx(t)/dt$ állapotsebesség, az $x(t)$ állapotváltozó, az $u(t)$ gerjesztés, illetve az $y(t)$ válasz az $x(t)$ állapotváltozó, az $u(t)$ gerjesztés között. A linearizálás módszerével ezt – a linearizálásra alkalmas f , és g nemlineáris függvények mellett, a rendszer egy munkapontjának kis környezetében – egy lineáris modellel közelíthetjük. A nemlineáris rendszerek néhány tulajdonságát és linearizálásának módszerét a Függelékben tárgyaljuk. Egyes folyamatok állapotegyenlete eleve lineáris (pl. R , L , C elemeket tartalmazó villamos áramkörök, tömeget, rugót, csillapítást tartalmazó mechanikai szerkezetek, stb.).

⁴ Ha az **LTI** rendszer az $u_I(t)$ gerjesztésre $y_I(t)$ választ, az $u_{II}(t)$ gerjesztésre $y_{II}(t)$ választ ad, akkor az $u(t) = c_1 u_I(t) + c_2 u_{II}(t)$ gerjesztésre adott válasz $y(t) = c_1 y_I(t) + c_2 y_{II}(t)$ (c_1, c_2 állandók).

⁵ A szabályozások vizsgálata során használt matematikai modellek különféle típusai közül jelen munkában a **statikus**–, a **dinamikus**–, a **lineáris**–, a **determinisztikus**–, a **koncentrált paraméterű**–, a **folytonos-idejű**–, és a **diszkrét-idejű** modelleket használjuk. A stochasztikus modellekben valószínűségi változókkal jellemzett jelekkel–, az elosztott paraméterű rendszerekben parciális differenciálegyenletekkel lehet leírni a dinamikus rendszer viselkedését, ezek azonban nem képezik jelen munka tárgyát. A **nemlineáris** rendszerekkel is csupán érintőlegesen foglalkozunk.

⁶ Az **arányos tag** o (output) kimenő jele az i (input) bemenő jelével arányos: $o(t) = k i(t)$, és k az átviteli tényező. Az **összegző tag** kimenő jele a bemenő jeleinek az összege: $o(t) = \sum i_i(t)$. Az **integráló alaptag** kimenő jele a bemenő jelének idő szerinti integrálja: $o(t) = o(0) + \int i(t) dt$, $o(0)$ a kimenő jel kezdeti értéke. Az arányos–, és az összegző tagok **algebrai tagok**, az integráló tag **dinamikus tag**.

Az állapotegyenlethez rendelhető hatásvázlatból is kiolvasható, hogy az $y(t)$ kimenő jelnek egyik összetevője az $x(t)$ állapotváltozó által meghatározott $Cx(t)$ komponens, a másik összetevője pedig az $u(t)$ bemenő jeltől *direkt* módon függő $Du(t)$ komponens⁷. Az $x(t)$ állapotváltozót az $u(t)$ gerjesztés-, és az $x(0)$ kezdeti feltétel befolyásolja, de ez a befolyás **az A állapotmátrixal visszacsatolt integráló tagon** keresztül juthat érvényre, ezért az $x(t)$ állapotváltozóban az $u(t)$ hatása késleltetéssel jelenhet meg. Miután az integráló tag az A állapotmátrixon keresztül **visszacsatolt**, ez az A állapotmátrixnak megkülönböztetett jelentőséget ad⁸.

Az állapotegyenlettel leírt lineáris rendszermodellben az u , x , y jelek mindegyike, és a t időváltozó, dimenziós fizikai mennyiség, és ebből adódóan az A , B , C , D *paramétermátrixok* elemei is különféle dimenzióval rendelkező fizikai paraméterek⁹. Az állapotegyenletben – a fizikai változókra, és az időre – U^0 , X^0 , Y^0 , T^0 , állandó értékű viszonyítási alapokat kijelölve – bevezethetők a jelek és az idő $u/U^0 = u^*$, $x/X^0 = x^*$, $y/Y^0 = y^*$, $t/T^0 = t^*$ dimenzió nélküli relatív mennyiségei, amelynek segítségével az állapotegyenlet relatív változóiban felírt alakja dimenzió függetlenné tehető (amplitúdó-, és idő léptékezés). A rendszerelméleti analízis során általában az állapotegyenletnek ezzel a normalizált, dimenzió független alakjával dolgozunk.

A matematikai modell alapján a rendszeranalízis alapkérdése: adott $u(t)$ belépő gerjesztés, az állapotváltozók $x(0)$ kezdeti értéke, valamint az A , B , C , D paramétermátrixok ismerete mellett, hogyan határozható meg az $x(t)$ állapotváltozó, és az $y(t)$ kimenőjel (a válasz) $t > 0$ időben keletkező időfüggvényei? Lényegében tehát az állapotegyenlet megoldásáról van szó. A megoldás megkeresésének – **LTI** rendszert feltételezve – hatékony módszere a *Laplace* (L) integrál-transzformáció alkalmazása. Ennek felhasználásával a t időtartományban értelmezett lineáris *differenciálegyenletek* helyett az s *Laplace* operátor tartományában *algebrai egyenletekkel* dolgozhatunk, de ennek „ára”, hogy az algebrai egyenletek megoldásként kapott $x(s)$, $y(s)$ válaszokat is az s operátor tartományban kapjuk. Ilyenkor egy **inverz Laplace** (L^{-1}) transzformációval térhetünk vissza az időtartományba¹⁰. Mindezek az absztrakció további elmélyítésével járnak.

Jelen anyagrészen olyan fogalmak ismertetésére kerül sor, amelyek a szabályozási rendszerek analíziséhez alapvetően szükségesek. Ilyen fogalmak és témakörök a jelátvivő tagok rendszerjellemező függvényei, a folytonos idejű (**FI**)-, és a **diszkrét idejű (DI)** dinamikus rendszerek differenciál-, és differencia egyenletei, állapotegyenletei, ezek kezelése *Laplace*-, illetve Z -transzformációs módszerekkel, a komplex függvénytan, a mátrixalgebra egyes fejezetei, stb. Először a folytonos idejű rendszerek elméleti összefoglalásával foglalkozunk, a diszkrét idejű rendszerek elméleti összefoglalását a számítógépes szabályozás ismertetésekor tárgyaljuk.

2. Folytonos idejű lineáris tagok rendszerjellemező függvényei, a stabilitás fogalma

A szabályozási rendszer hatásvázlatán szereplő bármely, u bemenő, és y kimenő jellel rendelkező – dinamikus rendszert absztraháló – jelátvivő tagjának általános rendszerjellemező függvénye (amelyből a többi rendszerjellemező függvény is származtatható), a tag **differenciálegyenlete**. Lineáris, egy bemenetű, egy kimenetű (**SISO** → single input single output) tag esetében ez vagy egy n rendű, állandó együtthatójú, lineáris **differenciálegyenlet (LDE)**, vagy n számú, elsőrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletet tartalmazó differenciálegyenlet rendszer¹¹ (lineáris állapotegyenlet: **LÁE**, lásd 3. ábra).

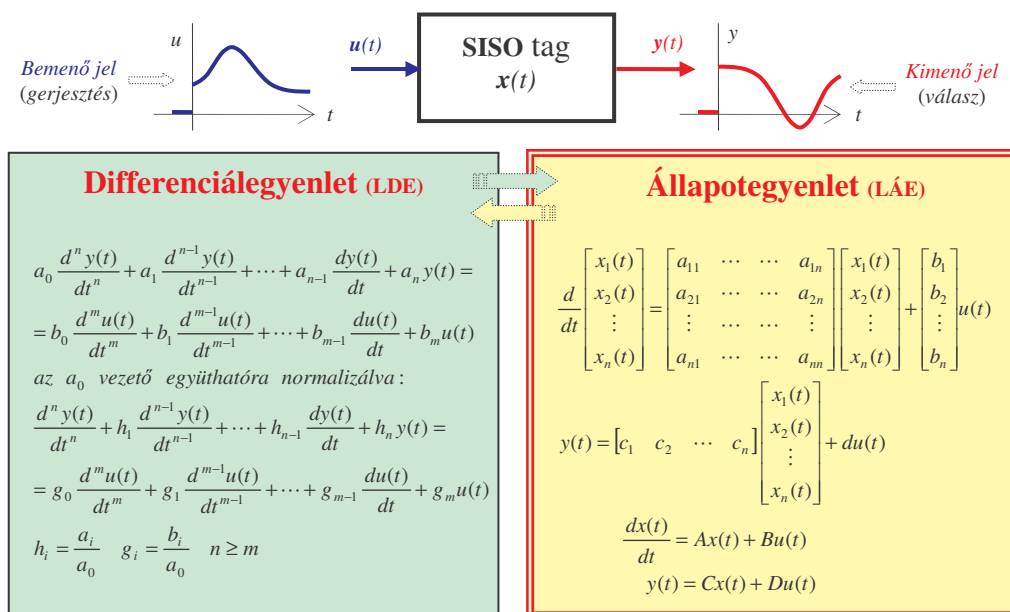
⁷ Ha az állapotegyenlet a szabályozott folyamatot írja le, akkor az $y(t)$ kimenő jelnek (a szabályozott jellemzőnek) a $Du(t)$ komponense általában zérus, vagyis az $u(t)$ gerjesztés (az irányítójel) kizárólag az $x(t)$ állapotváltozókon keresztül befolyásolja az $y(t)$ kimenő jelet. Ilyenkor az állapotegyenletben $D=0$.

⁸ Az A , B , C , D paramétermátrixokkal jellemzett **algebrai** tagok u , x bemenő jelei *időkésleltetés nélkül* állítják élő a Bu , Du , Cx , és Ax kimenő jeleiket (*időkésleltetés nélküli arányos* tagok).

⁹ A normalizálatlan rendszer A állapotmátrixának főátlójában szereplő a_{ii} paraméterek mindegyike [sec^{-1}] dimenzióval rendelkező számérték. Ennek indoklása: $dx/dt = \dots + a_{ii}x_i + \dots \rightarrow \dim[dx/dt] = \dim[a_{ii}x_i] \rightarrow \dim[a_{ii}] = 1/\text{sec}$.

¹⁰ A *nemlineáris* állapotegyenlet megoldására a *Laplace* transzformáció **nem** használható, és általában analitikus megoldás sem létezik. A nemlineáris állapotegyenlet megoldására numerikus módszerek jöhetnek szóba (*Euler*, *Adams*, *Runge-Kutta*, eljárások stb.).

¹¹ A **SISO** tag n rendű lineáris differenciálegyenletével leírt **LDE** modellje átalakítható az n számú, elsőrendű differenciálegyenletet tartalmazó **LÁE** állapotegyenletre (lásd az átviteli függvény felbontása témákat).



3. ábra
SISO tag matematikai modellje

Az állapotegyenlet $x(0)$ kezdeti feltételre és $u(t)$ gerjesztésre vonatkozó analitikus megoldása¹²:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad \text{ahol} \quad \phi(t) = e^{At} \quad \text{az} \quad \text{alaplátmátrix}$$

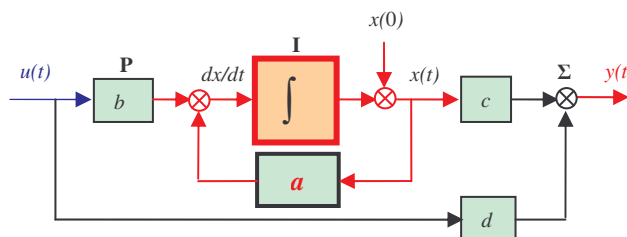
Megjegyzés:

A megoldó képletből láthatóan az $x(t)$ megoldásnak két összetevője van. Ezek az $x(0) \neq 0$ kezdeti feltétel által generált $x_s(t)$ mozgáskomponens (a rendszer **sajátmozgása**), valamint az $u(t) \neq 0$ gerjesztés által generált $x_g(t)$ mozgáskomponens (a rendszer **gerjesztett mozgása**). A szuperpozíció tételének alapján az eredő mozgás a két mozgás összegeként állítható elő.

$$x(t) = x_s(t) + x_g(t)$$

$$x_s(t) = e^{At} x(0) = \phi(t)x(0) \quad x_g(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau$$

Abban a speciális esetben, ha a **SISO** tag *elsőrendű* ($n=1$), a paramétermátrixok skaláris értékek: $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$. A dinamikus rendszer ekkor igen egyszerűvé válik (lásd 4a. ábra).



4a. ábra
Elsőrendű SISO rendszer hatásvázlata

Az elsőrendű rendszer állapotegyenletének megoldó képlet is egyszerű, mivel az e^{At} mátrix-exponenciális függvény (az aplmátrix) egy közönséges e^{at} exponenciális típusú skaláris kifejezés:

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau b = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)u(\tau) d\tau b$$

$$y(t) = cx(t) + du(t) \quad \text{és} \quad \phi(t) = e^{at}$$

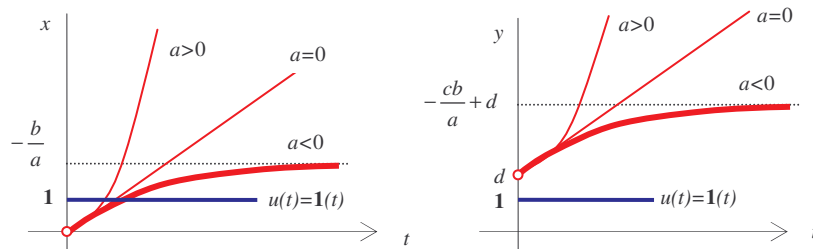
Ha például $u(t)=1(t)$ ugrásjel, és a kezdeti feltétel $x(0)=0$, akkor az elsőrendű rendszer $x(t)$, $y(t)$ válaszai:

¹² Az **LÁE** megoldó képletének meghatározása a „Lineáris differenciálegyenlet megoldása Laplace transzformációval” című részben található. Az n rendű lineáris differenciálegyenletnek (**LDE**) is van analitikus megoldó képlete, ennek részletezésére azonban nem térünk ki.

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau b = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} d\tau b = \begin{cases} bt & a=0 \\ e^{at} \left[\frac{1}{-a} e^{-a\tau} \right]_0^t b = -\frac{b}{a} (1 - e^{at}) & a \neq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} cbt + d & a=0 \\ -\frac{cb}{a} (1 - e^{at}) + d & a \neq 0 \end{cases}$$

Az elsőrendű rendszer esetében – az $x(t)$ állapotváltozóknak és az $y(t)$ kimenő jelnek – az egységugrás válasza $t \rightarrow \infty$ mellett kizárólag akkor lehet $x(\infty) = -b/a = \text{állandó}$, $y(\infty) = -cb/a + d = \text{állandó}$, ha $a < 0$, vagyis ha a 4a. ábra elsőrendű rendszerének **integráló tagja negatíván van visszacsatolva**. Az $x(t)$, $y(t)$ megoldások grafikonjait a 4b. ábra tartalmazza. Az elsőrendű rendszer jelentősége abban van, hogy egyrészt tranziensei igen egyszerűen számíthatók, másrészt az $n > 1$ rendszámú rendszer is igen gyakran – alkalmasan megválasztott koordináta transzformációval – ilyen **elsőrendű rendszerekre** *particionálható* (lásd az átviteli függvény párhuzamos felbontását).



4b. ábra

Elsőrendű rendszer ugrásválaszai $x(0)=0$ mellett

Az állapotegyenlet megoldásaként kapott $x(t)$ és $y(t)$ eredményekből figyeljük meg, hogy az **ugrásszerűen** változó $u(t)$ bemenőjel mellett az $x(t)$ állapotváltozó értéke a $t=0$ időpillanatban nem „ugorhat”, mivel az $x(t)$ integráló tag kimenő jele ($x(0)=0$). Az $y(t)=cx(t)+du(t)$ kimenő jel pedig a $t=0$ időpillanatban kizárólag $d \neq 0$ esetében tud $y(0)=cx(0)+du(0)=d$ értékre változni.

A rendszer aszimptotikus stabilitásának egyik megfogalmazása¹³: **aszimptotikusan stabilis az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer, ha a gerjesztetlen ($u(t)=0$) állapotában az $x(0)$ által generált $x_s(t)$ sajátmozgása $t \rightarrow \infty$ mellett zérushoz tart** (lásd 5.ábra). Ekkor ugyanis az $u=0$ bemenő jelnek megfelelően az $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ kimenő jel értéke is $t \rightarrow \infty$ mellett zérus értéket vesz fel. Matematikailag is kifejezve:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) x(0) = 0$$

Az **aszimptotikusan stabilis** lineáris rendszer $x_i(0)$ ($i: 1, 2, \dots, n$) kezdeti feltételek által generált sajátmozgásának mindegyik $x_i(t)$ állapotváltozója $t \rightarrow \infty$ mellett zérushoz tart ($x_i(\infty)=0$).

5. ábra

Aszimptotikusan stabilis rendszer sajátmozgása

Ez a feltétel akkor teljesül, ha az **A állapotmátrix minden λ_i sajátértékének valós része negatív szám (real $\lambda_i < 0$, $i=1, 2, \dots, n$)**¹⁴. Ha a SISO rendszert az LDE matematikai modelljével írjuk le, akkor a stabilitásnak az előzőekkel egyenértékű feltétele, hogy az **$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ karakterisztikus egyenletnek kizárólag negatív valós részű $\lambda_i = p_i$ gyökei legyenek** (a $\lambda_i = p_i$ gyökök a lineáris dinamikus rendszer **pólusai**).

A kétféle, LDE és LÁE matematikai modell – az $y(t)$ kimenőjel meghatározásának szempontjából – egymással egyenértékű, de az állapotegyenlet „gazdagabb”, mert megoldása az $y(t)$ kimenő jelen túlmenően a dinamikus rendszer n számú $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... $x_n(t)$, állapotváltozóit is szolgáltatja.

A SISO jelátvivő tag rendszerjellemező függvényei

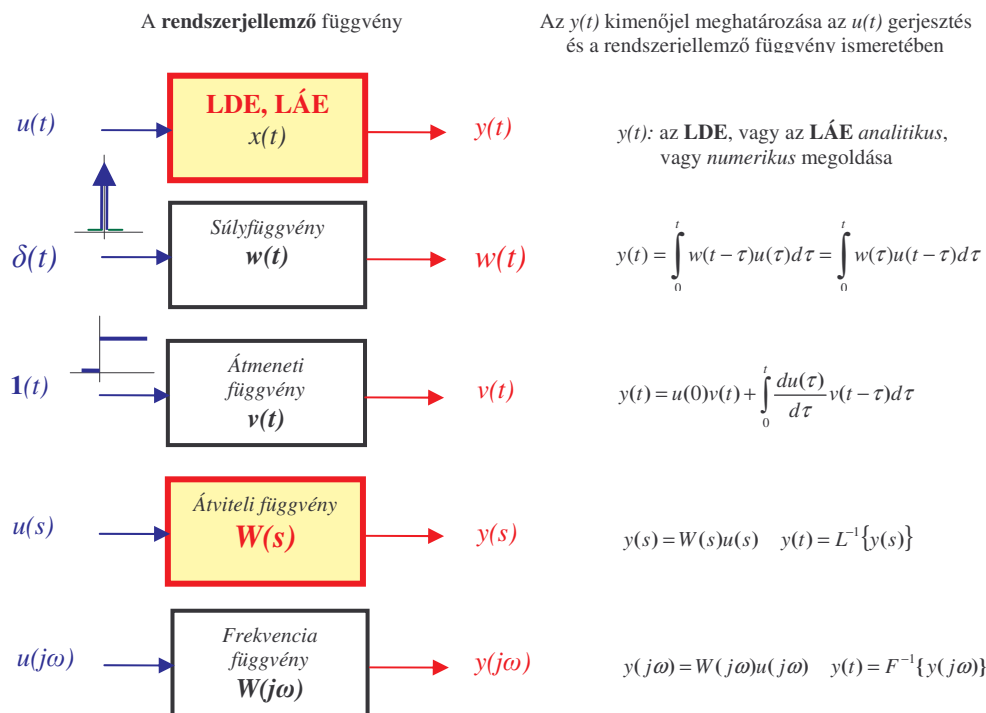
¹³ Egy ezzel egyenértékű másik megfogalmazás: **aszimptotikusan stabilis az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer, ha az $u(t)=1(t)$ által keltett $x_g(t)$ gerjesztett mozgása $t \rightarrow \infty$ mellett állandó értékhez tart** (ekkor az $u(\infty)=1$ bemenő jelnek megfelelően az $y(t)$ kimenő jel értéke is $t \rightarrow \infty$ mellett $y = \text{állandó}$ értékhez tart).

¹⁴ Az A állapotmátrix λ_i sajátértékei a mátrix $\det(\lambda I - A) = 0$ karakterisztikus egyenletének a gyökei. Ha $A=a$ skaláris, a rendszer elsőrendű, karakterisztikus egyenlete elsőfokú: $\lambda - a = 0$, vagyis ekkor $\lambda_i = a$.

A rendszerjellemző függvények egymással egyenértékűen írják a dinamikus rendszert, bármelyikük ismerete lehetővé teszi, hogy tetszőleges $u(t)$ bemenőjelre az $y(t)$ kimenőjel választ meghatározzuk. Ez a tulajdonság a lineáris rendszerre érvényes **szuperpozíció** elvből származik¹⁵. A rendszerjellemző függvények (lásd 6.ábra):

- 1.) A **differentiálegyenlet** (LDE), vagy az **állapotegyenlet** (LÁE).
- 2.) A **súlyfüggvény** (*impulse response*): az $u(t)=\delta(t)$ Dirac deltára adott $y(t)=w(t)$ válasz, zérus kezdeti feltételek mellett.
- 3.) Az **átmeneti függvény** (*step response*): az $u(t)=1(t)$ egységugrásra adott $y(t)=v(t)$ válasz, zérus kezdeti feltételek mellett.
- 4.) Az **átviteli függvény** (*transfer function*): a $w(t)$ súlyfüggvény $L\{w(t)\}=W(s)$ Laplace transzformáltja, vagy az $y(t)$ kimenőjel és az $u(t)$ bemenőjel Laplace transzformáltjainak $W(s)=y(s)/u(s)$ hányadosa, zérus kezdeti feltételek esetén.
- 5.) A **frekvencia függvény** (*frequency response*): a $w(t)$ súlyfüggvény $F\{w(t)\}=W(j\omega)$ Fourier transzformáltja, vagy az $u(t)$ bemenőjel és az $y(t)$ kimenőjel Fourier transzformáltjainak $W(j\omega)=y(j\omega)/u(j\omega)$ hányadosa, zérus kezdeti feltételek esetén.

A $v(t)$ átmeneti függvény, és a $W(j\omega)$ frekvencia függvény kísérletileg is meghatározható, és ezeknek birtokában minden más rendszerjellemző függvény is kiszámítható (a dinamikus rendszer **identifikációja** az átmeneti-, illetve a frekvencia függvényei alapján).



6. ábra
Lineáris SISO tag rendszerjellemző függvényei

Néhány fontosabb függvénykapcsolat a rendszerjellemző függvények között:

$$w(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad v(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau \quad W(s) = L\{w(t)\} \quad v(t) = L^{-1}\left\{W(s)\frac{1}{s}\right\} \quad W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega}$$

3. A Laplace integrál–transzformáció használata a dinamikus rendszer analízisében

A Laplace transzformáció

¹⁵ A szuperpozíció elvének egy alkalmazása: ha a lineáris SISO rendszer $u(t)$ gerjesztése periodikus időfüggvény, akkor ez harmonikus jelek összegeként is előállítható. Ha minden $u_i(t)$ harmonikus bemenőjel komponensre meghatározzuk az $y_i(t)$ harmonikus kimenőjel választ, akkor az eredeti $u=\sum u_i(t)$ bemenő jelre adott y válasz a kimenőjel részválaszainak komponenseiből tevődik össze: $y=\sum y_i(t)$.

A Laplace transzformáció az $f(t)$ belépő ($f(t)=0$, ha $t<0$) időfüggvényhez egy $F(s)$ operátor függvényt¹⁶ rendel, illetve az $f(t)$ függvényt az $F(s)$ függvényre képezi le, tehát ún. funkcionál. A transzformáció definíciós egyenlete az

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

improprius integrál¹⁷. Néhány – a szabályozási rendszerek analízisében gyakran előforduló – fontosabb belépő időfüggvény Laplace transzformáltja¹⁸:

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^k}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$L\{\delta(t-T)\} = \int_0^{\infty} \delta(t-T)e^{-st} dt = e^{-sT} \quad T > 0$$

Az inverz Laplace transzformáció

Az inverz transzformáció definíciós kifejezése:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

Az $F(s)e^{st}$ komplex függvény vonalmenti integráljának tényleges kiszámítása visszavezethető egy zárt görbe menti integrál kiértékelésére, amely Cauchy tétele alapján történhet¹⁹. Legyen $F(s)=G(s)/H(s)$ algebrai tört, és $G(s)$ az s m fokszámú, $H(s)$ az s n fokszámú ($n \geq m$) polinomjai²⁰. A $H(s)=0$ egyenlet k_i multiplicitású²¹ p_i gyöke az $F(s)$ szinguláris helye (pólusa). Ekkor:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n}$$

¹⁶ A $L\{f(t)\}=F(s)$ jelölés mellett – alkalmanként, az egyszerűség céljából – az $L\{f(t)\}=f(s)$ jelölést is használjuk. Az $f(s)$ jelölés természetesen nem azt jelenti, hogy az $f(t)$ időfüggvény t változóját az s változóra kell cserélni!

¹⁷ Az integrál konvergenciájának elegendő feltétele: ha $f(t)$ a $t \geq 0$ tartomány minden véges szakaszában szakaszonként folytonos, akkor elegendően nagy t -re $\text{abs}[f(t)] \leq K e^{\sigma t}$ legyen (K és σ pozitív állandók). A definíciós kifejezésben a t időváltozóra vonatkozó határozott integrál eredményeként az időváltozó „mintegy eltűnik”, és helyére az s változó lép be.

¹⁸ A táblázatban szereplő $f(t)$ időfüggvények $L\{f(t)\}=F(s)$ transzformáltjait a definíciós integrálképlettel lehet meghatározni. Például az $f(t)=1(t)$ ugrásfüggvény és az $f(t)=e^{at}$ belépő exponenciális függvény Laplace transzformáltjai:

$$L\{1(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{-s} (0-1) = \frac{1}{s} \quad L\{e^{at}\} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a} \quad \text{ha } \text{real}(s-a) < 0$$

A Laplace transzformáltakat tartalmazó táblázatból figyeljük meg, hogy a transzformált $L\{f(t)\}=F(s)$ függvények az $s=\sigma+j\omega$ komplex változónak **algebrai törtjei** (algebrai tört: polinomok hányadosából képzett törtfüggvény). Kivétel az időben eltolást tartalmazó $\delta(t-T)$ eltolt Dirac impulzus Laplace transzformáltja: $L\{\delta(t-T)\}=e^{-sT}$, amely transzcendens kifejezés.

¹⁹ Az $F(s)e^{st}$ függvénynek a komplex számsík egy zárt c görbe mentén vett vonal integrálja zérus, ha a függvény a görbe által határolt tartományban analitikus. Ha viszont az $F(s)e^{st}$ függvénynek a c által határolt tartományban szinguláris pontjai vannak, akkor az integrál a reziduumszámítás alapján számítható ki. A definíciós kifejezésben az s időváltozóra vonatkozó határozott integrál eredményeként az s operátorváltozó „mintegy eltűnik”, és helyére az t időváltozó változó lép be.

²⁰ Az $F(s)=G(s)/H(s)$ algebrai tört a $H(s)$ nevezőjének vezető együtthatójára normalizált ($h_0=1$).

²¹ Például a $H(s)=(s+4)^2(s-5)^2(s+6)$ polinom $p_1=-4$ gyöke $k_1=3$ -, a $p_2=5$ gyöke $k_2=2$ -, a $p_3=6$ gyöke $k_3=1$ multiplicitással rendelkezik.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s)e^{st} ds = \sum_{(i)} \underbrace{res}_{p_i} F(s)e^{st}$$

$$\underbrace{res}_{p_i} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(k_i-1)!} \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} \left[(s-p_i)^{k_i} \frac{G(s)}{H(s)} e^{st} \right]$$

Ha a $H(s)=0$ minden p_i gyöke egymástól különböző ($p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$), alkalmazható a *kifejtési tétel*:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_1^n \frac{G(p_i)}{\left. \frac{dH(s)}{ds} \right|_{s=p_i}} e^{p_i t}$$

Ha a $H(s)=0$ minden p_i gyöke egymástól különböző, valamint $H(s)$ n fokszáma $G(s)$ m fokszámánál nagyobb ($n > m$), akkor az $F(s)$ algebrai tört $r_i/(s-p_i)$ komponensekből álló *részlet törtre* bontható, vagyis:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{G(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-p_i}$$

ahol:

$$H(s)\big|_{s=p_i} = 0 \quad \text{és} \quad r_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{G(s)}{\frac{dH(s)}{ds}} = \frac{G(p_i)}{H'(p_i)}$$

Végeredményben:

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-p_i} \right\} = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t}$$

Láthatóan az $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ időfüggvény $re^{p_i t}$ típusú exponenciális függvények összegeként állítható elő. Az időfüggvény lefolyásában ezért a **$H(s)$ nevező p gyökeinek** (az $F(s)$ pólusainak) **meghatározó jelentősége van**.

A Laplace transzformáció néhány fontosabb tétele

1.) A Laplace transzformáció-, és az inverz Laplace transzformáció **lineáris** művelet:

$$L\{ax(t) + bu(t)\} = ax(s) + bu(s)$$

$$L^{-1}\{cy(s) + du(s)\} = cy(t) + du(t)$$

(a , b , c , és d állandók).

2.) Az $x(t)$ tárgyfüggvény idő szerinti deriváltjának transzformáltja (a **differentiálási szabály**):

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n x(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sL\{x(t)\} - x(0) = sx(s) - x(0)$$

Ha $x(0)=0$, akkor **$L\{dx(t)/dt\}=sx(s)$ $\rightarrow$ (s a **differentiálás operátora****. Az operátor tartományban az s változóval történő szorzásnak, az időtartományban az idő szerinti differenciálás felel meg).

3.) Eltolási tétel ($T > 0$):

$$L\{u(t-T)\} = e^{-sT} u(s) \quad T > 0$$

3.) Tárgyfüggvény integráljának transzformáltja (az **integrálási szabály**):

$$L\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{x(s)}{s}$$

(**$1/s$ az **integrálás operátora****. Az s operátor tartományban az **$1/s$** kifejezéssel történő szorzásnak, a t időtartományban az idő szerinti integrálás felel meg: **$x(s)/s \rightarrow \int x(t)dt$**).

7.) A **konvolúció** tételei²²:

²² $L\{w(t)\}=W(s), L\{u(t)\}=U(s)$. A $W(s)U(s)$ szorzat $L^{-1}\{W(s)U(s)\}$ inverz transzformáltja **nem** $w(t)u(t)$, hanem **$L^{-1}\{W(s)U(s)\}=\int w(\tau)u(t-\tau)d\tau!!!$**

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

8.) Kezdeti-, és végérték tételek:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

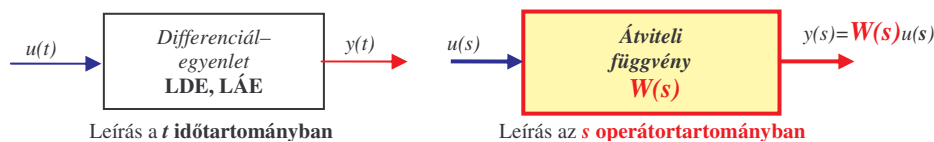
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad \text{ha} \quad \operatorname{Re} p_i < 0 !!!$$

4. A lineáris differenciálegyenlet megoldása Laplace transzformációval

A Laplace transzformáció alapvető sajátossága, hogy a lineáris dinamikus rendszereknek a „ t ” időtartományban **differenciálegyenletekkel** adott matematikai modelljét az „ s ” operátor tartományban **algebrai egyenletekké** lehet egyszerűsíteni. Ez a tulajdonság a transzformáció linearitási tételeiből, és a differenciálási szabályából származtatható.

SISO tag differenciálegyenletének megoldása. Az átviteli függvény

Az egy bemenetű, egy kimenetű – SISO taggal absztrahált – dinamikus rendszert jellemezzük az $u(t)$ bemenő-, és $y(t)$ kimenő jelű jelátvivő taggal (lásd 7. ábra).



7. ábra

Jelátvivő tag leírása az idő-, és az operátor tartományban

A vezető együtthatóra normalizált ($h_0=1$) differenciálegyenlet (LDE):

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + g_m u(t)$$

Zérus kezdeti feltételek mellett képezve a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját, algebrai egyenletet kapunk:

$$s^n y(s) + h_1 s^{n-1} y(s) + \dots + h_{n-1} s y(s) + h_n y(s) = g_0 s^m u(s) + g_1 s^{m-1} u(s) + \dots + g_{m-1} s u(s) + g_m u(s)$$

$$(s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n) y(s) = (g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m) u(s)$$

Ebből a kimenő jel $y(s)$ Laplace transzformáltja:

$$y(s) = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n} u(s) = W(s) u(s)$$

A kifejezésben szereplő

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n} = \frac{G(s)}{H(s)}$$

algebrai tört a jelátvivő tag **átviteli függvénye**²³. A lineáris szabályozási rendszerek analízisében az átviteli függvénynek meghatározó jelentősége van. Az átviteli függvény nevezőjéből képzett $H(s)=0$ karakterisztikus

²³ Realizálható az átviteli függvény, ha $n \geq m$. A realizálhatóság azt jelenti, hogy fizikailag létrehozható olyan dinamikus rendszer, amely az adott átviteli függvénnyel leírható. Ha $n=m=0$, $y(t)=ku(t)$ algebrai egyenlet, $W(s)=k$, és elfajuló esetről van szó (időkésleltetés nélküli arányos tag). Ez elméleti határeset, a valóságos fizikai rendszerekben a jelkésleltetés mindig jelen van. Az n rendű lineáris differenciálegyenlet h_k ($k=0,1,\dots,n$), és g_k ($k=0,1,\dots,m$) együtthatóinak ismeretében a tag $W(s)$ átviteli függvénye közvetlenül felírható. Ez fordítva is alkalmazható: a $W(s)=G(s)/H(s)=y(s)/u(s)$ ismerete alapján a $H(s)y(s)=G(s)u(s)$ alakból a tag differenciálegyenlete adható meg. Az operátor tartományban az s változóval való szorzásnak az időtartományban az időszerinti differenciálás felel meg, ezért $s^n y(s) \rightarrow (d/dt)^n y(t)$, $n: 0, 1, 2, \dots, n$. **Az átviteli függvény az egyik legfontosabb, és általánosan használt szabályozástechnikai fogalom, a tag differenciálegyenletének „egy más alakja”.**

egyenlet p_i gyökei ($i: 1, 2, \dots, n$) határozzák meg a $W(s)$ átviteli függvény *szingularitásait*²⁴, a jelátvivő tag dinamikus tulajdonságait, stabilis-, vagy labilis voltát. Az átviteli függvény definíciója:

Az egy bemenetű, egy kimenetű lineáris SISO tag $W(s)$ átviteli függvénye az $y(t)$ kimenő-, és az $u(t)$ bemenő jelek $y(s)/u(s)$ Laplace transzformáltjának hányadosa, zérus kezdeti feltételek mellett. Vagy ezzel egyenértékűen: a tag átviteli függvénye a $w(t)$ súlyfüggvényének Laplace transzformáltja:

$$W(s) = y(s)/u(s) = L\{w(t)\}$$

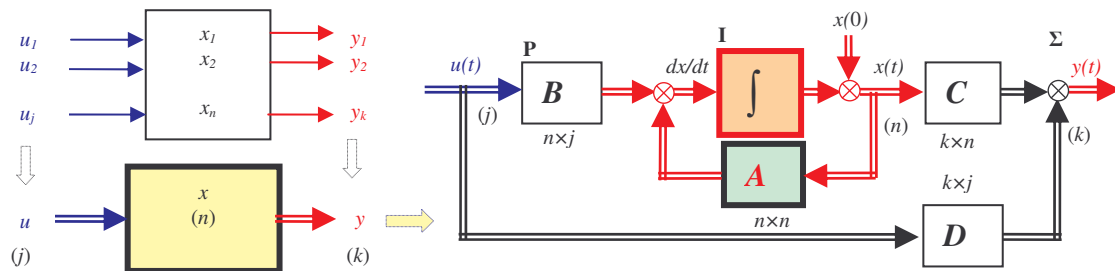
Az $y(t)$ kimenő jelet $W(s)$ és $u(s)$ ismeretében a Laplace transzformáció *konvolúció* tétele alapján számíthatjuk:

$$\begin{aligned} y(s) &= W(s)u(s) \quad \Rightarrow \quad w(t) = L^{-1}\{W(s)\} \quad u(t) = L^{-1}\{u(s)\} \\ y(t) &= \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

ahol $w(t)$ a dinamikus tag súlyfüggvénye²⁵.

A lineáris MIMO tag állapotegyenletének megoldása. Az átviteli mátrix

A több ($j > 1$ számú) bemenetű, és több ($k > 1$ számú) kimenetű, $n \geq 1$ rendű (MIMO: multi input, multi output) rendszert absztraháló jelátvivő tag különféle hatásvázlatait a 8. ábrán szemléltetjük.



8. ábra
MIMO tag különféle hatásvázlatai

Az időtartományban adott állapotegyenletnek a megoldása az s operátor tartományban:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ \hline sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s) \end{aligned}$$

Innen egyenletrendezéssel²⁶:

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)] \\ y(s) &= C\{(sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)]\} + Du(s) = \\ &= C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) \end{aligned}$$

Ha az x állapotváltozók mindegyikének a kezdeti értéke $x(0)=0$, akkor:

$$\begin{aligned} y(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) = W(s)u(s) \\ y(t) &= L^{-1}\{[C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)\} = L^{-1}\{W(s)u(s)\} \end{aligned}$$

²⁴ $W(s)$ szinguláris helyei az s komplex változó azon $s=p_i$ értékei, ahol a $W(s)$ átviteli függvény $H(s)$ nevezője zérus értéket vesz fel ($H(p_i)=0 \rightarrow W(p_i)=\infty$). Az átviteli függvényével leírt dinamikus rendszer sajátmozgása $\exp(p_i t)$ típusú időfüggvény komponensekből tevődik össze.

²⁵ Súlyfüggvény: a tag $u(t)=\delta(t)$ Dirac deltára adott válasza, zérus kezdeti feltételek mellett. A $\delta(t)$ Dirac delta elméleti jelentőséggel bíró vizsgálati jel. Egységnyi jelterületű impulzus, amely a $t=0$ időpont kivételével minden időpontban zérus, és a $t=0$ időpontban ∞ , de jelterülete egységnyi. Laplace transzformáltja: $L\{\delta(t)\}=\delta(s)=1$. Ennek megfelelően: $y(s)=w(s)=W(s)\delta(s)=W(s)$, és ezért $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$, illetve $W(s)=L\{w(t)\}$.

²⁶ Az egyenletrendezésnél figyelembe kell venni, hogy mátrixműveletekről van szó: $(sI-A)x(s)=x(0)+Bu(s) \rightarrow x(s)=(sI-A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]$. Az inverzmátrix: $(sI-A)^{-1}=\text{adj}(sI-A)/\det(sI-A)$.

$W(s)$ most a tag **átviteli mátrixa**²⁷. Részletezve:

$$W(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] = \frac{\text{Cadj}(sI - A)B + \det(sI - A)D}{\det(sI - A)}$$

A több ($j > 1$ számú) bemenetű, több ($k > 1$ számú) kimenetű lineáris MIMO rendszer átviteli mátrixa az $y(s) = W(s)u(s)$ kifejezéssel definiálható. Általános esetben mindegyik kimenőjel – a $W_{kj}(s)$ átviteli függvényen keresztül – mindegyik bemenő jeltől függ. Mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix}}_{A \text{ } W(s) \text{ átviteli mátrix}} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

$$y_i(s) = W_{i1}(s)u_1(s) + W_{i2}(s)u_2(s) + \dots + W_{ij}(s)u_j(s) \quad i: 1, 2, \dots, k$$

Megjegyzés: **SISO** tag esetében $k=1$, $j=1$, ezért ekkor az átviteli mátrix az $y(s) = W(s)u(s)$ kifejezésnek megfelelően a $W(s)$ átviteli függvényre egyszerűsödik.

Az átviteli **mátrixnak** $k \times j$ számú átviteli függvény részeleme van. Ezek mindegyike az s változónak olyan algebrai törje, amelyben a nevező minden részelem esetében ugyanaz a **$H(s) = \det(sI - A)$** karakterisztikus polinom. Ennek n fokszáma azonos a rendszer állapotváltozóinak n számával, $p_i = \lambda_i$ gyökei pedig az A állapotmátrix sajátértékei.

Az állapotegyenlet megoldása az időtartományban a **konvolúció** tétel alapján számítható, de figyelembe kell venni, hogy most a kifejezések mátrix műveleteket tartalmaznak:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)\} = \\ &= L^{-1}\{(sI - A)^{-1}x(0)\} + L^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\} = \\ &= L^{-1}\{\phi(s)\}x(0) + L^{-1}\{\phi(s)Bu(s)\} = \\ &= \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ \phi(s) &= (sI - A)^{-1} \quad \phi(t) = L^{-1}\{\phi(s)\} = e^{At} \end{aligned}$$

ahol **$\Phi(t) = e^{At}$** a rendszer **alapmátrixa**, a **$\Phi(s) = L\{\Phi(t)\} = L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} = \text{adj}(sI - A) / \det(sI - A)$** pedig ennek a Laplace transzformáltja.

5. Jelátvivő tagok alapstruktúrái

Két, matematikai modelljével leírt SISO tag egymással háromféle **alapstruktúrában** fordulhat elő. Ezek az alapstruktúrák a tagok **soros**, és **párhuzamos** kapcsolásai, valamint a tagok egymáson keresztül történő pozitív, vagy negatív **visszacsatolásai**. Az eredő struktúrának a tulajdonságai (hasonlóan, mint a kapcsolásban részvevő egyedi tagok mindegyikének) a bemenő–kimenő jelek közötti függvénykapcsolatot definiáló rendszerjellemező függvényekkel írhatók le. Az eredő függvénykapcsolatnak a meghatározására célszerűen az alapkapsolásban résztvevő mindkét tagot a $W_1(s)$ és $W_2(s)$ átviteli függvényeikkel definiáljuk, és ezek ismeretében számítjuk a rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvényét. A következőkben a lehetséges alapstruktúrákat²⁸ tárgyaljuk.

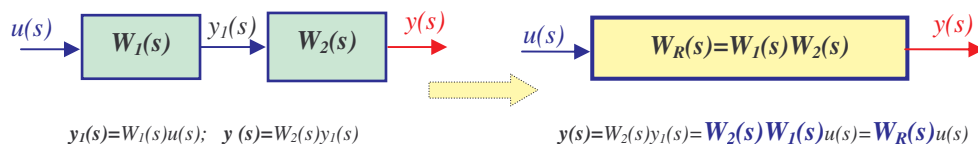
Tagok soros kapcsolása

Két jelátvivő tag soros kapcsolásakor az első tag y_1 kimenő jele működteti a második tagot, tehát az első tag y_1 kimenőjele egyben a második tag bemenő jele is²⁹. A kapcsolást a 9. ábra szemlélteti.

²⁷ A MIMO tagot leíró átviteli mátrix k sorában és j oszlopában álló mindegyik átviteli függvények a nevezője ugyanaz a $H(s) = \det(sI - A)$ n fokszámú polinom. $G_{ij}(s)$ számlálójuk szintén polinom, amelynek azonban m fokszáma **legfeljebb azonos** a $H(s)$ n fokszámával (ha $D \neq 0$), általában azonban $m < n$ (ha $D = 0$). Ennek magyarázata az $\text{adj}(sI - A)$ mátrix legfeljebb $(n-1) \times (n-1)$ mérete.

²⁸ A jelátvivő tagok alapstruktúráiban értelmezett soros-, párhuzamos kapcsolások **nem azonos fogalmak** az áramkörökben alkalmazott áramköri elemek soros-, és párhuzamos kapcsolásaival!

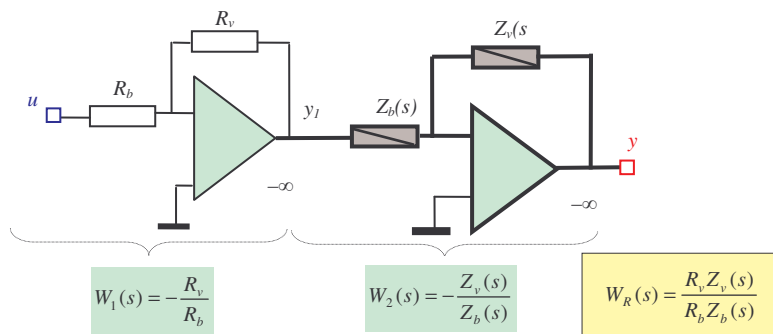
²⁹ Szerkezeti megoldásban a soros kapcsolat akkor hozható létre, ha az első tag y_1 kimenő jele, és a második tag y_1 bemenő jele azonos fizikai jelhordozókkal rendelkeznek.



9. ábra

Tagok soros kapcsolása

A soros kapcsolás eredő átviteli függvénye a két átviteli függvény **szorzata**. A kapcsolásban szereplő tagok – az eredő jelátviteli tulajdonság megváltozása nélkül – egymással felcserélhetők. Áramköri példa (lásd 10. ábra).

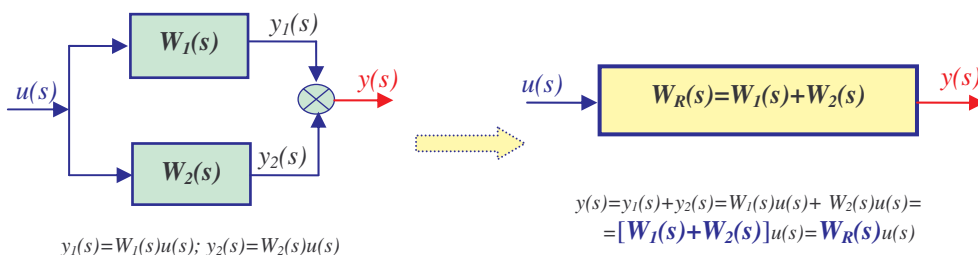


10. ábra

Áramköri példa tagok soros kapcsolására

Tagok párhuzamos kapcsolása

Két jelátvivő tag párhuzamos kapcsolásakor mindkét tag bemenő jele *azonos*, az eredő kimenő jel az egyes tagok kimenő jeleinek az **összege**³⁰. A párhuzamos kapcsolást a 11. ábra szemlélteti.

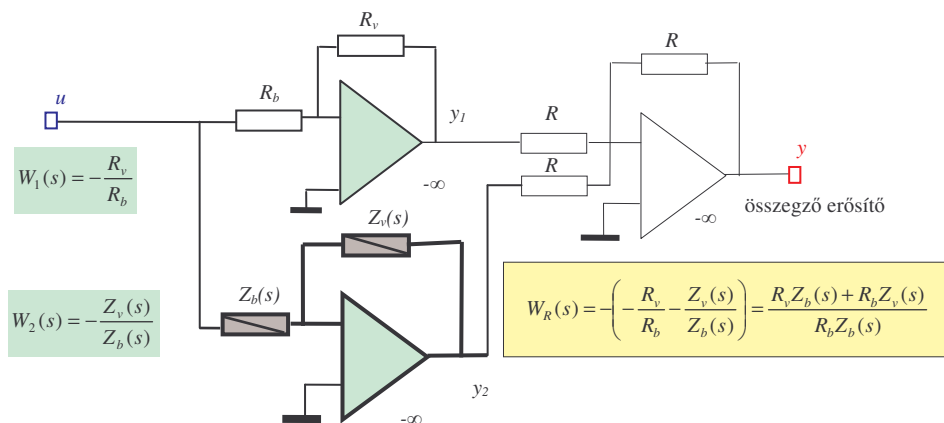


11. ábra

Tagok párhuzamos kapcsolására

A párhuzamos kapcsolásban szereplő tagok – az eredő jelátviteli tulajdonság megváltozása nélkül – egymással felcserélhetők. Áramköri példa (lásd 12. ábra).

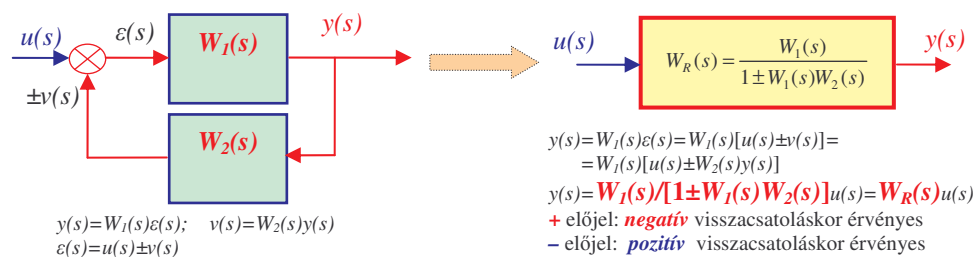
³⁰ Szerkezeti megoldásban a párhuzamos kapcsolás akkor hozható létre, ha mindkét tag u bemenő jele, és mindkét tag y_1, y_2 kimenő jelei, azonos fizikai jelhordozókkal rendelkeznek. A soros-, és a párhuzamos kapcsolás tetszőleges számú tagra is kiterjeszthető. Soros kapcsoláskor $W_R(s) = \prod W_i(s)$, párhuzamos kapcsoláskor $W_R(s) = \sum W_i(s)$.



12. ábra
Áramköri példa tagok párhuzamos kapcsolására

Tagok visszacsatolása

Két jelátvivő tag egymással visszacsatolt kapcsolást alkot, ha a $W_1(s)$ átviteli függvényű *visszacsatolt* tag $\varepsilon(s)$ bemenő jele a rendszer $u(s)$ bemenő jelének, és a $W_2(s)$ átviteli függvényű *visszacsatoló* tag $v(s)$ kimenő jelének az összege (**pozitív** visszacsatolás), vagy különbsége (**negatív** visszacsatolás). A visszacsatolás alapstruktúrája különleges jelentőséggel bír. Ebben a struktúrában a jelek egy zárt hatásláncú ($u \rightarrow \varepsilon \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow \varepsilon$) hurokban terjednek, aminek előnyös, és hátrányos³¹ tulajdonságai vannak. A visszacsatolás hatásláncában jelentős szerepe van az egyébként egymással soros kapcsolást alkotó, $W_0(s) = W_1(s)W_2(s)$ ún. **hurokátviteli függvénynek**. A kapcsolást a 13. ábra szemlélteti.



13. ábra
Tagok visszacsatolása

Miután a szabályozási rendszer is a **negatív visszacsatolás elvére** épül, ezért az erre vonatkozó

$$W_R(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{1}{W_2(s)} \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)}$$

eredő átviteli függvény képletének a zárt szabályozási rendszer eredő jelátviteli tulajdonságainak meghatározásában is alapvető jelentősége van³². A visszacsatolás **zárthurkú** jelterjedési viszonyai – különösen a pozitív visszacsatolás mellett – **stabilitási** problémákhoz vezethet. A kapcsolásban szereplő tagok – az eredő jelátviteli tulajdonság megváltozása nélkül – (a $W_1(s) = W_2(s)$ eset kivételével) egymással *nem cserélhetők fel*.

Megjegyzés

Ha $W_1(s) = k_1$, $W_2(s) = k_2$ időkéscsökkentés nélküli arányos tagok, a visszacsatolt rendszer hatáslánca algebrai hurkot alkot³³. Ekkor az eredő átviteli függvény (az eredő átviteli tényező) $k_0 = k_1 k_2$ jelölés mellett:

$$W_R(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)} = \frac{k_1}{1 \mp k_1 k_2} = \frac{1}{k_2} \frac{k_0}{1 \mp k_0}$$

Pozitív visszacsatolás, és $k_0 = 1$ hurokerősítési érték mellett $1 - k_0 = 0$, és ezért formálisan $W_R(s) = \infty$. A pozitívan visszacsatolt algebrai hurok $k_0 \geq 1$ hurokerősítés mellett nem üzemeltethető, mert a struktúra bármilyen kis értékű δu bemenő jele a

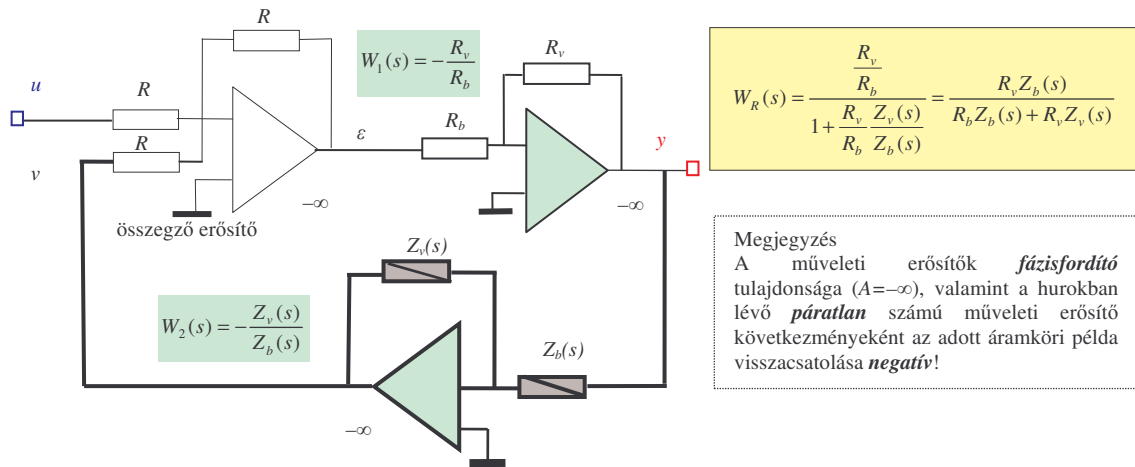
³¹ A visszacsatolás hátrányos tulajdonsága a struktúra labilitásának a lehetősége, a stabilis tagokból felépülő visszacsatolás labilissá válhat.

³² A stabilis negatív visszacsatolás eredő átviteli függvényének képletéből láthatóan $W_0(s) \gg 1$ esetében $W_R(s) \approx 1/W_2(s)$, vagyis az eredő átviteli függvény (közelítőleg) a visszacsatoló tag átviteli függvényének reciproka. Ez a tulajdonság a $W_2(s)$ átviteli függvénynek, illetve a szabályozási kör visszacsatolásában szereplő érzékelő szervének különleges jelentőséget ad.

³³ Ez egy idealizált állapot, a valóságos viszonyok mellett a bemenő-, és a kimenő jelek közötti jelkéscsökkentés általában jelen van.

visszacsatolás eredő kimenő jelét a telítődésbe viszi. A pozitív visszacsatolás az erősítési tényező növelésére, vagy integráló tag megvalósítására használható.

Áramköri példa (lásd 14. ábra).



Legyen $W_1(s)=G_1(s)/H_1(s)$, és $W_2(s)=G_2(s)/H_2(s)$. Ekkor a tagok **soros** kapcsolás esetében az eredő átviteli függvény $W_R(s)=G_1(s)G_2(s)/[H_1(s)H_2(s)]$, a tagok **párhuzamos** kapcsolás esetében pedig $W_R(s)=[G_1(s)H_2(s)+G_2(s)H_1(s)]/[H_1(s)H_2(s)]$. Tehát mindkét esetben a nevező ugyanaz a $H_R(s)=H_1(s)H_2(s)$ kifejezés. A stabilitás feltétele a $H_R(s)$ – és ezen belül a $H_1(s)$ és a $H_2(s)$ polinomok – Hurwitz polinom volta. Ha tehát a tagok a **soros**, és a **párhuzamos** kapcsolásaiban *mindkét* tag aszimptotikusan stabilis³⁴, az eredő rendszer is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ha viszont a tagok *valamelyike* labilis, akkor az eredő rendszer is az.

Nincs ez így a visszacsatolás esetében³⁵. A visszacsatolás eredő átviteli függvénye ugyanis $W_R(s)=G_1(s)H_2(s)/[H_1(s)H_2(s)\pm G_1(s)G_2(s)]$. Az eredő visszacsatolt rendszer most akkor stabilis, ha a $H_R(s)=H_1(s)H_2(s)\pm G_1(s)G_2(s)$ Hurwitz polinom³⁶. Ekkor *stabilis* tagok esetében is lehet az eredő rendszer *labilis*, vagy *labilis* tag megfelelő visszacsatolásával az eredő rendszer *stabilizálható*.

Példa

Két jelátvivő tag átviteli függvénye:

$$W_1(s) = \frac{G_1(s)}{H_1(s)} = \frac{k_1}{(1+sT)(1+s\alpha T)} = \frac{4}{(1+3s)(1+2s)} \quad W_2(s) = \frac{G_2(s)}{H_2(s)} = \frac{k_2}{1+s\beta T} = \frac{k_2}{1+s}$$

$$k_1 = 4, \quad T = 3, \quad \alpha = 2/3 \quad \beta = 1/3$$

A $W_1(s)$ átviteli függvényű *stabilis* tagot a $W_2(s)$ átviteli függvényű *stabilis* taggal **negatíván** visszacsatoljuk. Határozzuk meg, hogy mekkora legyen a visszacsatoló tag $k_2 > 0$ átviteli tényezője, ha az eredő rendszernek aszimptotikusan stabilisnak kell lennie! Láthatóan $H_1(s)=(1+3s)(1+2s)$ Hurwitz polinom, miután mindkét gyöke $p_1 = -1/T = -1/3 < 0$, $p_2 = -1/\alpha T = -1/2 < 0$. A $H_2(s)=(1+s)$ is Hurwitz polinom, mert gyöke $p_3 = -1/\beta T = -1 < 0$. A stabilis tagokat tartalmazó **negatíván** visszacsatolt rendszer stabilitását meghatározó karakterisztikus polinom:

$$H_R(s) = H_1(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s) = (1+sT)(1+s\alpha T)(1+s\beta T) + k_1k_2 = s^3\alpha\beta T^3 + s^2(\alpha+\beta+\alpha\beta)T^2 + s(1+\alpha+\beta)T + 1 + k_1k_2$$

Ennek gyökei akkor negatív valós részűek, ha az együtthatók mindegyike pozitív szám, valamint az együtthatókból képzett H_d Hurwitz determináns, és ennek főátlójára támaszkodó minden H_{di} al-determináns is pozitív érték. Az együttható feltétel $k_1k_2 = k > -1$ mellett bizonyosan teljesül. A harmadfokú polinom Hurwitz determinánsa és az al-determinánsok:

³⁴ A $H_R(s)=H_1(s)H_2(s)$ akkor Hurwitz polinom, ha $H_1(s)$ és $H_2(s)$ külön-külön is Hurwitz polinom. A Hurwitz polinom minden p_i gyöke negatív, vagy negatív valós résszel rendelkezik. Ha a $W_R(s)$ átviteli függvény $H_R(s)$ nevezője Hurwitz polinom, akkor az eredő rendszer sajátmozgásának transziens komponensei „lecsengenek”, vagyis: $t \rightarrow \infty$ mellett $Sexp(p_i t) \rightarrow 0$.

³⁵ Szerkezeti megvalósításban a visszacsatolás akkor hozható létre, ha a visszacsatolt tag y kimenő jele, és a visszacsatoló tag bemenő jele–, valamint a visszacsatolt tag ε bemenő jele, és a visszacsatoló tag v kimenő jele azonos jelhordozóval rendelkeznek. A **MATLAB series**, **parallel**, **feedback**, **cloop** függvényei támogatják az alapkapsolások eredő átviteli függvényeinek kiszámítását.

³⁶ A – előjel a struktúra pozitív visszacsatolása mellett érvényes. Ekkor a rendszer labilitásra való hajlama jelentős.

$$H_{\Delta} = \begin{vmatrix} (\alpha + \beta + \alpha\beta)T^2 & 1+k & 0 \\ \alpha\beta T^3 & (1+\alpha+\beta)T & 0 \\ 0 & (\alpha + \beta + \alpha\beta)T^2 & 1+k \end{vmatrix}$$

$$H_{\Delta 1} = (\alpha + \beta + \alpha\beta)T^2 = (2/3 + 1/3 + 2/9)3^2 = 11 > 0$$

$$H_{\Delta 2} = \begin{vmatrix} (\alpha + \beta + \alpha\beta)T^2 & 1+k \\ \alpha\beta T^3 & (1+\alpha+\beta)T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1+k \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 66 - 6 - 6k = 60 - 6k$$

$$H_{\Delta 3} = (1+k)H_{\Delta 2}$$

Láthatóan, $H_{\Delta 2} > 0$, ha $k < 10$. Pozitív k körerősítés mellett $H_{\Delta 3} = (1+k)H_{\Delta 2} > 0$, ha $H_{\Delta 2} > 0$, ezért a stabilitás feltétele a $H_{\Delta 2} > 0$ teljesítésére egyszerűsödik. Ebből $-1 < k = 4k_2 < 10$, illetve $-1/4 < k_2 < 10/4$. A negatív visszacsatolás miatt $0 < k_2 < 10/4$. Vegyük észre, hogy a stabilitási határhelyzetet jelentő k_{2krit} kritikus erősítési tényező értéke nem az időállandóktól, hanem ezek egymáshoz képesti α, β viszonyszámától függ.

Példa

Két jelátvivő tag átviteli függvénye:

$$W_1(s) = \frac{G_1(s)}{H_1(s)} = k_1 \frac{s\tau_1 + 1}{sT_1 - 1} = \frac{2s+1}{3s-1} \quad W_2(s) = \frac{G_2(s)}{H_2(s)} = k_2 \frac{1+s\tau_2}{1+sT_2} = k_2 \frac{1+4s}{1+5s}$$

$$k_1 = 1, \quad \tau_1 = 2, \quad T_1 = 3, \quad \tau_2 = 4, \quad T_2 = 5$$

A $W_1(s)$ átviteli függvényű **labilis** tagot a $W_2(s)$ átviteli függvényű **stabilis** taggal **negatíván** visszacsatoljuk. Számítsuk ki a visszacsatoló tag k_2 átviteli tényezőjét, ha az eredő rendszernek aszimptotikusan stabilisnak kell lennie! Láthatóan $H_1(s) = (3s-1)$ nem Hurwitz polinom, miután gyöke $p_1 = 1/T_1 = 1/3 > 0$, és ezért $W_1(s)$ labilis tagot jelenít meg. A labilis tag átmeneti függvénye:

$$v_1(t) = L^{-1} \left\{ k_1 \frac{s\tau_1 + 1}{sT_1 - 1} \frac{1}{s} \right\} = k_1 L^{-1} \left\{ \frac{\tau_1 + T_1}{sT_1 - 1} - \frac{1}{s} \right\} = k_1 \left(\frac{\tau_1 + T_1}{T_1} e^{\frac{t}{T_1}} - 1 \right) = \frac{5}{3} e^{\frac{t}{3}} - 1$$

A $H_2(s) = (5s+1)$ Hurwitz polinom, mivel gyöke $p_2 = -1/T_2 = -1/5 < 0$, és ezért $W_2(s)$ stabilis, (önbeálló) tagot definiál. A stabilis tag átmeneti függvénye:

$$v_2(t) = L^{-1} \left\{ k_2 \frac{1+s\tau_2}{1+sT_2} \frac{1}{s} \right\} = k_2 L^{-1} \left\{ \frac{\tau_2 - T_2}{1+sT_2} + \frac{1}{s} \right\} = k_2 \left(\frac{\tau_2 - T_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} + 1 \right) = k_2 \left(\frac{-1}{5} e^{-\frac{t}{5}} + 1 \right)$$

A negatíván visszacsatolt rendszer stabilitását meghatározó karakterisztikus polinom:

$$\begin{aligned} H_R(s) &= H_1(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s) = (sT_1 - 1)(1 + sT_2) + k_1k_2(s\tau_1 + 1)(1 + s\tau_2) = \\ &= T_1T_2s^2 + (T_1 - T_2)s - 1 + k_1k_2\tau_1\tau_2s^2 + k_1k_2(\tau_1 + \tau_2)s + k_1k_2 = \\ &= (T_1T_2 + k_1k_2\tau_1\tau_2)s^2 + [T_1 - T_2 + k_1k_2(\tau_1 + \tau_2)]s - 1 + k_1k_2 = \\ &= (15 + 8k_2)s^2 + (-2 + 6k_2)s - 1 + k_2 \end{aligned}$$

Matematikai tétel szerint $H_R(s)$ akkor Hurwitz polinom, ha a másodfokú polinom minden együtthatója pozitív érték. Ez akkor teljesül, ha $15 + 8k_2 > 0$, $-2 + 6k_2 > 0$, $-1 + k_2 > 0$, illetve $k_2 > -15/8$, $k_2 > 2/6 = 1/3$, $k_2 > 1$. Mindhárom feltétel teljesül, ha $k_2 > 1$.

Az előzőekben vázolt alapstruktúrák felhasználásával tetszőleges bonyolultságú lineáris rendszer – köztük a lineáris szabályozás – hatásvázlata építhető fel. Ezeket az alapstruktúrákat hallgatólagosan már korábban is felhasználtuk.

5. SISO tag differenciálegyenletéhez rendelhető – P, I, Σ lineáris alaptagokat tartalmazó – hatásvázlatok

Lineáris **alaptagok**: **P** (proporcionális, *időkésés nélküli arányos tag*), kimenő jele a bemenő jelének állandó szorosa: $y(t) = kx(t)$, átviteli függvénye $W_P(s) = k$ ahol k az **átviteli tényező**. **I** (*integráló tag*), kimenő jele a bemenő jelének időszerinti integrálja: $y = y(0) + \int u(t)dt$, differenciálegyenlete $dy(t)/dt = u(t)$, átviteli függvénye $W_I(s) = 1/s$. **Σ** (*összegző tag*), kimenő jele a bemenő jeleinek az összege: $y(t) = \sum u_i(t)$, $y(s) = \sum u_i(s)$ ³⁷. A lineáris alaptagok **soros**-, **párhuzamos**-, és **visszacsatolást** tartalmazó alapkapsolásaival tetszőlegesen bonyolult lineáris rendszer hatásvázlat struktúrája felépíthető. Az *alaptagokból felépített hatásvázlat alapján – az integráló tagok kimenő jeleit állapotváltozóknak elnevezve – az átviteli függvényével leírt tag állapotegyenlete is meghatározható.*

Az átviteli függvény **közvetlen** felbontása

³⁷ Tágabb értelemben a **H** jelű holtidős tagot is a lineáris alaptagok között soroljuk. A holtidős tag kimenő jele T_h holtidő elteltével követi a bemenő jelét: $y = u(t - T_h)$, $T_h > 0$. A holtidős tag átviteli függvénye a $W_H(s) = \exp(-sT_h)$ transzcendens kifejezés.

Holtidő nélküli, másodrendű rendszert vizsgálunk, de az n rendű esetben is az itt bemutatott eljárást lehet alkalmazni.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dy(t)}{dt} + h_2 y(t) = g_0 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + g_1 \frac{du(t)}{dt} + g_2 u(t)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W(s) = \frac{g_0 s^2 + g_1 s + g_2}{s^2 + h_1 s + h_2} = \frac{G(s)}{H(s)}$$

Ha az $i(s)$ segédváltozó bevezetésével az átviteli függvény $G(s)$ számlálóját, és $H(s)$ nevezőjét az $s^{-2}i(s)$ kifejezéssel szorozzuk, akkor kapjuk:

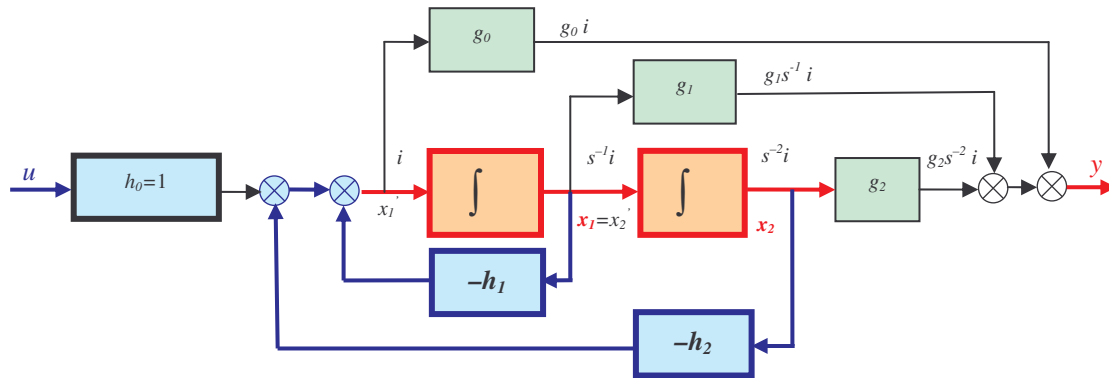
$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{g_0 s^2 + g_1 s + g_2}{s^2 + h_1 s + h_2} \frac{s^{-2}i(s)}{s^{-2}i(s)}$$

Az $y(s) = G(s)s^{-2}i(s)$, és az $u(s) = H(s)s^{-2}i(s)$ azonosságok alapján –, illetve az $y(s)$ és $i(s)$ független változókra történő rendezéssel, az átviteli függvény közvetlen felbontásához juthatunk:

$$y(s) = (g_0 + g_1 s^{-1} + g_2 s^{-2})i(s)$$

$$u(s) = (1 + h_1 s^{-1} + h_2 s^{-2})i(s) \Rightarrow i(s) = [u(s) - h_1 s^{-1}i(s) - h_2 s^{-2}i(s)]$$

Az utóbbi egyenletekből – figyelembe véve, hogy s^{-1} az integrálás operátora – felépíthető a másodrendű rendszer **P**, **I**, és **Σ** lineáris alaptagokat tartalmazó hatásvázlata³⁸ (lásd 15. ábra).



15. ábra
Az átviteli függvény **közvetlen** felbontása

A differenciálegyenletben, az átviteli függvényben, illetve a hatásvázlaton szereplő h_2 , h_1 , és g_2 , g_1 , g_0 együtthatók mindegyike tetszőleges valós szám³⁹. Fontos tulajdonsága a közvetlen felbontás alapján kapott struktúrának, hogy a $H(s)$ karakterisztikus polinom h_1 és h_2 együtthatói az integrátorok visszacsatolásaiban játszanak meghatározó szerepet. **A hatásvázlat integráló tagjainak kimenő jelei a másodrendű dinamikus rendszer x_1 és x_2 állapotváltozói**⁴⁰. Ezekkel a jelölésekkel a másodrendű rendszer állapotegyenlete:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [(g_1 - g_0 h_1) \quad (g_2 - g_0 h_2)] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + g_0 u(t)$$

A két elsőrendű lineáris differenciálegyenletet, és az y kimenő jelet meghatározó algebrai egyenletet tartalmazó állapotegyenlet – az adott $u(t)$ -re vonatkozó $y(t)$ válasz meghatározásának szempontjából – egyenértékű a SISO tagot leíró másodrendű, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlettel. Az

³⁸ Az $i(s)$ jelet két, egymással sorosan kapcsolt integráló tagok láncolatának bemenetén működtetve az első integrátor kimenő jele $s^{-1}i(s)$, a másodiké $s^{-1}[s^{-1}i(s)] = s^{-2}i(s)$. Ha a rendszám n , $s^{-n}i(s)$ segédváltozóval kell számolnunk. $1/s$ az integráló tag átviteli függvénye.

³⁹ Vegyük figyelembe, hogy a differenciálegyenletnek – a karakterisztikus egyenlet vezető együtthatójára – normalizált alakját használjuk, ezért $h_0=1$, $h_i=a/a_0$, $g_i=b/a_0$.

⁴⁰ Az átviteli függvény közvetlen felbontásával kapott hatásvázlat struktúra figyelembe vétele ismértve az **integráló tagok egymást működtetett, soros kapcsolást alkotó láncolata** (lásd a hatásvázlatot). Az irányíthatósági kanonikus alaknak ez jellegzetes tulajdonsága. A rendszám $n \geq 1$, és az integráló tagok száma azonos az n rendszámmal. Az irányíthatósági kanonikus alaknak a szabályozástechnikában a szabályozásméret állapotirányíthatósági kérdéskörének tárgyalásánál van jelentősége.

állapotegyenlet megoldása azonban nem csupán az $y(t)$ kimenő jelet szolgáltatja, hanem a rendszer $x(t)$ állapotváltozóit is megadja, mivel az $y(t)$ meghatározását meg kell előznie az $x(t)$ állapotváltozók kiszámításának⁴¹. Az $x(t)$ meghatározása a differenciálegyenlet megoldását igényli.

Az átviteli függvény közvetlen felbontása alapján származtatott állapotegyenletnek jellegzetes tulajdonsága, hogy a rendszám $n > 1$ tetszőleges értéke esetén az A állapotmátrix alakja:

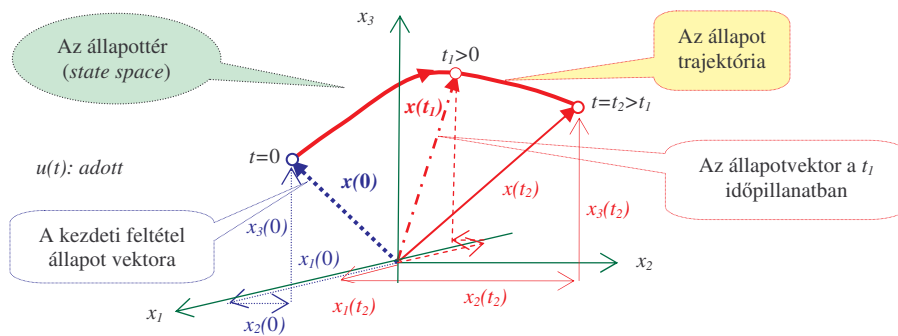
$$A = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 & \cdots & -h_{n-1} & -h_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Láthatóan A első sorában a karakterisztikus polinom negatív együtthatói állnak. Az állapotmátrixból következik, hogy az $x_i(t)$ állapotváltozó $dx_i(t)/dt$ sebessége az $x_{i-1}(t)$ állapotváltozóval azonos ($dx_i(t)/dt = x_{i-1}(t)$, $i=2,3,\dots,n$), és csupán az x_1 állapotváltozó $dx_1(t)/dt$ állapotsebessége függ minden állapotváltozótól, hacsak a h_i ($i=1, 2, \dots, n$), együtthatók valamelyike nem zérus. Az állapotegyenletnek ez az alakja az **irányíthatósági kanonikus alak**. n rendszámra részletezve:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -h_1 x_1(t) - h_2 x_2(t) - \cdots - h_n x_n(t) + h_0 u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= x_{n-2}(t) \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= x_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Az állapotváltozók által kifeszített n dimenziós *állapotteret* ekkor *fázistérnek* nevezzük, amely $n=2$ kétdimenziós esetben a *fázissík*⁴².

Az adott $u(t)$, $x(0)$ hatására keletkezett $x(t)$ megoldást szemléltető **állapottrajektóriát** (harmadrendű rendszer esetében) a 16. ábra tartalmazza. Az állapottrajektória az adott $u(t)$ gerjesztés, és $x(0)$ kezdeti feltétel hatására keletkező $x(t)$ állapotvektor végpontjainak mértani helye, miközben a t időváltozó egy tetszőleges intervallumot befut. A trajektória a t idővel paraméterezett térgörbe, a rátett nyíl iránya az idő növekedésének az irányát mutatja. Lényegét tekintve az $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ állapotváltozó időfüggvényeinek egy térbeli ábrázolási formája.



16. ábra
A tranzienst folyamat szemléltetése állapottrajektóriával

Az együtthatók számértékei alapján már a másodrendű rendszer is számos, különféle tulajdonsággal rendelkező jelátvivő tagokat definiálhat. Ezek közül – a szabályozási rendszerek analízisében gyakran használt – néhány fontosabbat táblázatban foglalunk össze. A táblázat differenciálegyenleteiben található h_0 , h_1 , h_2 és g_0 , g_1 ,

⁴¹ A **MATLAB** mind az egy egyenletből álló n rendű lineáris differenciálegyenlet megoldását, mind az n számú elsőrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet rendszer (az állapotegyenlet) megoldását hatékonyan támogatja: $[y, x] = \text{lsim}(G, H, u, t)$, $[y, x] = \text{lsim}(A, B, C, D, u, t, x0)$. A $v(t)$ átmeneti függvény-, vagy a $w(t)$ súlyfüggvény számítása **MATLAB** támogatással: $[v, x, t] = \text{step}(G, H)$, $[w, x, t] = \text{impz}(G, H)$. Az átviteli függvényből az állapotegyenletet irányíthatósági kanonikus alakjának paramétermátrixait az $[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(G, H)$ utasítással lehet meghatározni. A rendszer sajátmozgásának meghatározását támogató **MATLAB** utasítás: $[y, x, t] = \text{initial}(A, B, C, D, x0, t)$.

⁴² Itt kell megjegyeznünk azt a tulajdonságot, hogy az átviteli függvénynek a közvetlen felbontástól eltérő, de vele egyenértékű másfajta felbontásai is léteznek, ezek egyikére a következőkben térünk ki.

g_2 együtthatókról feltételeztük, hogy valós, pozitív értékű számok⁴³, vagy egyes esetekben valamelyikük értéke zérus. Ebből következőleg az átviteli függvényekben szereplő $k, k_i, k_d, T, T_d, T_i, \zeta, \omega_0$ paraméterek szintén pozitív értékek, és a h, g együtthatókból származtathatók. A táblázatban a differenciálegyenleteket (LDE)–, a $W(s)$ átviteli függvényeket–, és a $v(t)$ átmeneti függvényeket szerepeltettük, a $w(t)$ súlyfüggvények–, és a $W(j\omega)$ frekvencia függvények meghatározását az olvasóra bízuk.

Név	h_0	h_1	h_2	g_0	g_1	g_2	Differenciálegyenlet	Átviteli függvény $W(s) = y(s)/u(s)$	Átmeneti függvény $v(t) = L^{-1}\{W(s)/s\}$
P	0	0	h_2	0	0	g_2	$h_2 y(t) = g_2 u(t)$	k	$k1(t)$
I	0	h_1	0	0	0	g_2	$h_1 \frac{dy}{dt} = g_2 u$	$\frac{k_i}{s} = \frac{1}{sT_i}$	$k_i t = \frac{t}{T_i}$
D	0	0	h_2	0	g_1	0	$h_2 y = g_1 \frac{du}{dt}$	$k_d s = sT_d$	$k_d \delta(t) = T_d \delta(t)$ nem realizálható
T	0	h_1	h_2	0	0	g_2	$h_1 \frac{dy}{dt} + h_2 y = g_2 u$	$\frac{k}{1+sT}$	$k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$
T_ξ	h_0	h_1	h_2	0	0	g_2	$h_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + h_1 \frac{dy}{dt} + h_2 y = g_2 u$	$\frac{k}{1+2\zeta T_0 s + T_0^2 s^2}$	$k[1 + \frac{e^{-\frac{\xi}{T_0} t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t - \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi})]$
PD_i	0	0	h_2	0	g_1	g_2	$h_2 y = g_1 \frac{du}{dt} + g_2 u$	$k(1+sT_d)$	$k[1+T_d \delta(t)]$ nem realizálható
PD	0	h_1	h_2	0	g_1	g_2	$h_1 \frac{dy}{dt} + h_2 y = g_1 \frac{du}{dt} + g_2 u$	$k \frac{1+sT_d}{1+sT}$	$k(1 + \frac{T_d - T}{T} e^{-\frac{t}{T}})$ $T_d > T$
PI	0	h_1	0	0	g_1	g_2	$h_1 \frac{dy}{dt} = g_1 \frac{du}{dt} + g_2 u$	$k \frac{1+sT_i}{sT_i}$	$k(1 + \frac{t}{T_i})$
O	h_0	0	h_2	0	0	g_2	$h_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + h_2 y = g_2 u$	$k \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$k(1 - \cos \omega_0 t)$
stb.									

A táblázatban felsorolt tagok megnevezései: **P** (arányos – tag, kimenő jele a bemenő jelével arányos, $k=g_2/h_2$ átviteli tényező), **I** (integráló tag, kimenő jele a bemenő jelének idő szerinti integráljával arányos, kimenő jelének a sebessége arányos a bemenő jellel, $k_i=g_2/h_1$ integrálási átviteli tényező), **D** (ideális differenciáló tag, kimenő jele a bemenő jel differenciálhányadosával arányos, $k_d=g_1/h_2$ differenciálási átviteli tényező, nem realizálható⁴⁴), **T** (egytárolós arányos tag, $k=g_2/h_2$ átviteli tényező, $T=h_1/h_2$ időállandó), **T_ξ** (kétárolós lengő⁴⁵ tag, $k=g_2/h_2$ átviteli tényező, $T_0=\sqrt{(h_0/h_2)}$ időállandó, $2\zeta T_0=h_1/h_2$, $0<\zeta<1$ csillapítási tényező (damping factor)), **PD_i** (ideális arányos+differenciáló tag, $k=g_2/h_2$, $T_d=g_1/g_2$, nem realizálható), **PD** (realizálható arányos+differenciáló tag $k=g_2/h_2$, $T_d=g_1/g_2$, $T=h_1/h_2$), **PI** (arányos+integráló tag $k=g_1/h_1$, $T_i=g_1/g_2$), **O** (oszillátor, lengő tag, $k=g_2/\sqrt{(h_0/h_2)}$, $\omega_0^2=h_2/h_0$). Az átmeneti függvényeket a differenciálegyenleteknek az $u(t)=1(t)$ gerjesztésre, és zérus kezdeti feltételekre vett megoldásával, vagy a $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}$ inverz Laplace transzformáció kiszámításával lehet meghatározni.

Az egységnyi átviteli tényezővel ($k=1$) rendelkező kétárolós lengő tag (**T_ξ** tag) differenciálegyenlete és paraméterei:

$$h_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + h_1 \frac{dy(t)}{dt} + h_2 y(t) = g_2 u(t)$$

$$h_0 = T_0^2 \quad h_1 = 2\zeta T_0 \quad h_2 = 1 \quad g_2 = 1$$

$$T_0^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

$$T_0 > 0 \quad 0 \leq \zeta < 1$$

Szabályozástechnikai szempontból ennek a tagnak az a jelentősége, hogy a zárt szabályozási rendszer $u_d(t)$ alapjele–, és $y(t)$ szabályozott jellemzője között ilyen differenciálegyenlettel szeretnénk – legalább is közelítőleg – leírni a jelátviteli viszonyokat. A differenciálegyenlethez rendelhető, lineáris alaptagokat tartalmazó hatásvázlat felépítéséhez a differenciálegyenletet rendezzük a $d^2 y(t)/dt^2$ kifejezésre, és ennek kétszeres integrálásával állítsuk elő az $y(t)$ kimenő jelet.

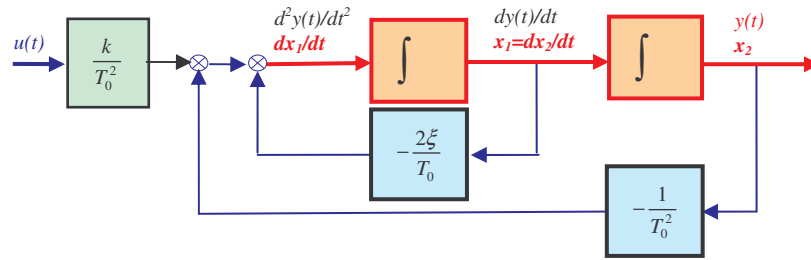
⁴³ Természetesen az is lehetséges, hogy az h_k illetve g_k együtthatók valamelyike negatív szám. Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező (labilis, és nem minimum fázisú) tagokat a táblázatban nem szerepeltettük, ezeket a későbbiekben tárgyaljuk.

⁴⁴ A „nem realizálható” fogalom azt jelenti, hogy nem hozható létre olyan fizikailag megvalósítható szerkezet, áramkör, stb., aminek matematikai modellje az adott differenciálegyenlet lenne.

⁴⁵ A kétárolós lengő tag (**T_ξ** tag) a szabályozástechnika fontos fogalma, mert a zárt szabályozási rendszer tulajdonságait – legalább is közelítőleg – ilyen taggal szeretnénk leírni. A tag $W(s)$ átviteli függvényének pólusai a $p = [-\zeta \pm \sqrt{1-\zeta^2}]/T_0$ negatív valós részü konjugált komplex póluspár ($0 \leq \zeta < 1$, $T_0 > 0$).

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{2\xi}{T_0} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{T_0^2} y(t) + \frac{1}{T_0^2} u(t)$$

Az alaptagokból felépített hatásvázlat a 17. ábrán látható.



17. ábra
A T_ξ tag hatásvázlata

Az integráló tagok x_1 , és x_2 kimenő jelei a rendszer állapotváltozóí. Ezekkel az állapotegyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{2\xi}{T_0} x_1(t) - \frac{1}{T_0^2} x_2(t) + \frac{1}{T_0^2} u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\xi}{T_0} & -\frac{1}{T_0^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0^2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{2\xi}{T_0} & -\frac{1}{T_0^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

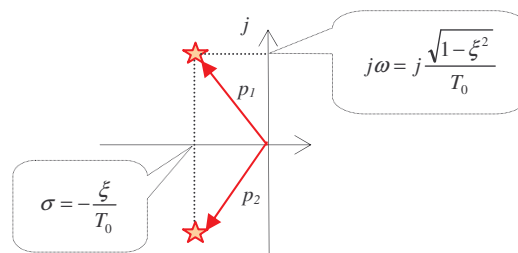
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

A tag átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

A kéttárolós lengő tag (T_ξ tag) karakterisztikus egyenlete és ennek gyökei (lásd 18. ábra):

$$T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\frac{\xi}{T_0} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T_0} \quad T_0 > 0 \quad 0 \leq \xi \leq 1$$



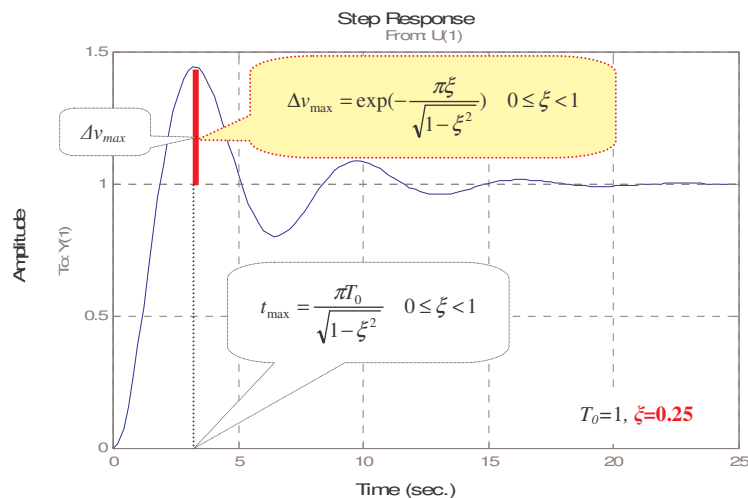
18. ábra
A T_ξ tag karakterisztikus egyenletének gyökei (a domináns póluspár)

A tag $v(t)$ átmeneti függvényét inverz Laplace transzformációval számíthatjuk:

$$v(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2} \frac{1}{s} \right\} = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-\xi \frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\sqrt{1-\xi^2} \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t + \xi \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t \right) & 0 \leq \xi < 1 \\ \left[1 - \left(\frac{T_0 - t}{T_0} \right) e^{-\frac{t}{T_0}} \right] & \xi = 1 \end{cases}$$

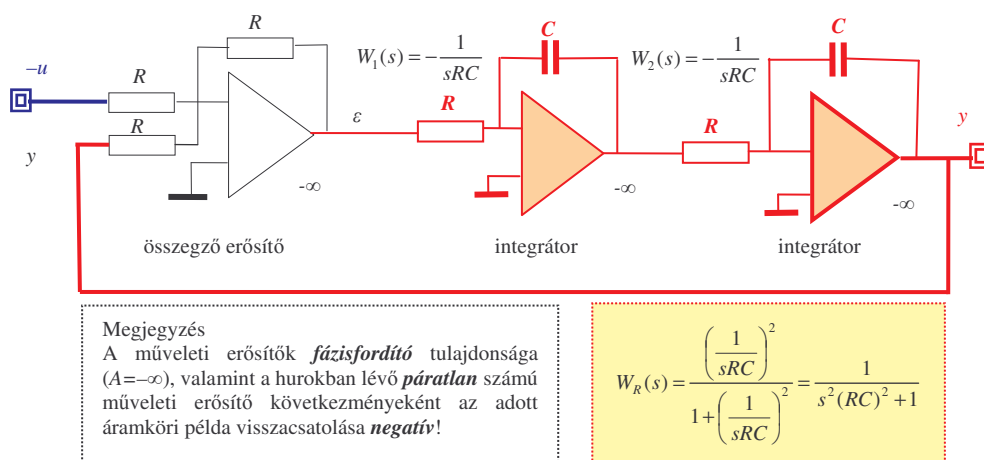
Az átmeneti függvényt MATLAB támogatással⁴⁶ ábrázolva (lásd 19. ábra):

```
T0=1; z=0.25; [G,H]=ord2(T0,z);grid on;step(G,H);
```



19. ábra
A T_ξ tag átmeneti függvénye

Figyeljük meg, hogy a T_ξ tag $v(t)$ átmeneti függvényének $\Delta v_{\max}$ túllendülése kizárólag a ξ csillapítási tényező függvénye. $\xi=0$ esetben ez a túllendülés $\Delta v_{\max}=1$, és a rendszer oszcillátorként viselkedik. A hatásvázlaton a $\xi=0$ eset annak felel meg, amikor a két, egymással soros kapcsolást alkotó integráló tag negatívan van visszacsatolva (vagyis a belső visszacsatolás hiányzik). A hatásvázlat ekkor egy oszcillátor jelátviteli viszonyainak absztrahált leírása. Egy tényleges – a $\xi=0$ esetnek megfelelő – áramköri kapcsolás (lásd 20. ábra):



20. ábra
A $\xi=0$ esetnek megfelelő áramköri illusztráció (RC oszcillátor)

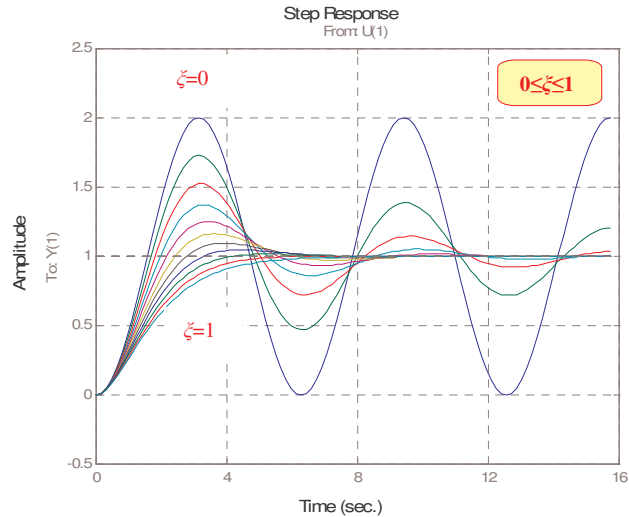
A csillapítási tényezők különféle értékeihez tartozó súly-, és átmeneti függvényeket MATLAB támogatással számítjuk, a 21. ábrán az átmeneti függvényeket mutatjuk.

⁴⁶ A $[G,H]=\text{ord2}(T_0,z)$ MATLAB függvény a $T_0, \xi=z$ paraméterekkel rendelkező T_ξ tag $W(s)$ átviteli függvényének $G(s)$ számlálóját és $H(s)$ nevezőjét definiálja.

```

k=1; T=1;
for i=0:10
    grid on;
    t=0:5*pi/100:5*pi;
    G=k; H=[T*T 2*i/10/T 1];
    impulse(G, H, t); hold on;
end
pause; clf;
for i=0:10
    grid on;
    t=0:5*pi/100:5*pi;
    G=k; H=[T*T 2*i/10/T 1];
    step(G, H, t); hold on;
end

```



21. ábra
A T_ξ tag átmeneti függvényei a ξ csillapítási tényező különféle értékeire

A kéttárolós lengő tag átmeneti függvénye $\xi=0$ esetben csillapítatlan lengő mozgást végez, szemben a $\xi=1$ esettel, ami az aperiodikus beállítás határeset. A csillapítatlan lengés periódusideje $T=2\pi T_0$, lengési körfrekvenciája $\omega_0=2\pi/T=2\pi/(2\pi T_0)=1/T_0$. ($\omega_0=1/T_0$ a T_ξ tag un. csillapítatlan saját körfrekvenciája, a $\sqrt{1-\xi^2}/T_0 = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ a csillapított saját körfrekvencia). Ha a stabilis zárt szabályozási rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvényének pólus-zérus eloszlása olyan, hogy egy un. $p_R=-\sigma_R \pm j\omega_R$ domináló póluspáron kívül minden további pólus valós része $-\sigma_{Ri} < -3\sigma_R$, akkor a zárt rendszer jelátviteli tulajdonságai – legalább is közelítőleg – a kéttárolós lengő tag tulajdonságaival jellemezhetők.

Az átviteli függvény párhuzamos felbontása

A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényű SISO tag $u(t)=\delta(t)$ Dirac impulzusra adott $y(t)=w(t)$ súlyfüggvény válasza – feltételezve, hogy a $H(s)$ nevező minden p_i gyöke egymástól különböző, és $n>m$ – a $W(s)$ részlettöltre bontásával⁴⁷, valamint annak figyelembevételével, hogy $L\{\delta(t)\}=1$, egyszerűen számítható⁴⁸:

$$y(s) = W(s)u(s) = g_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \left(\frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} \right) = w(s)$$

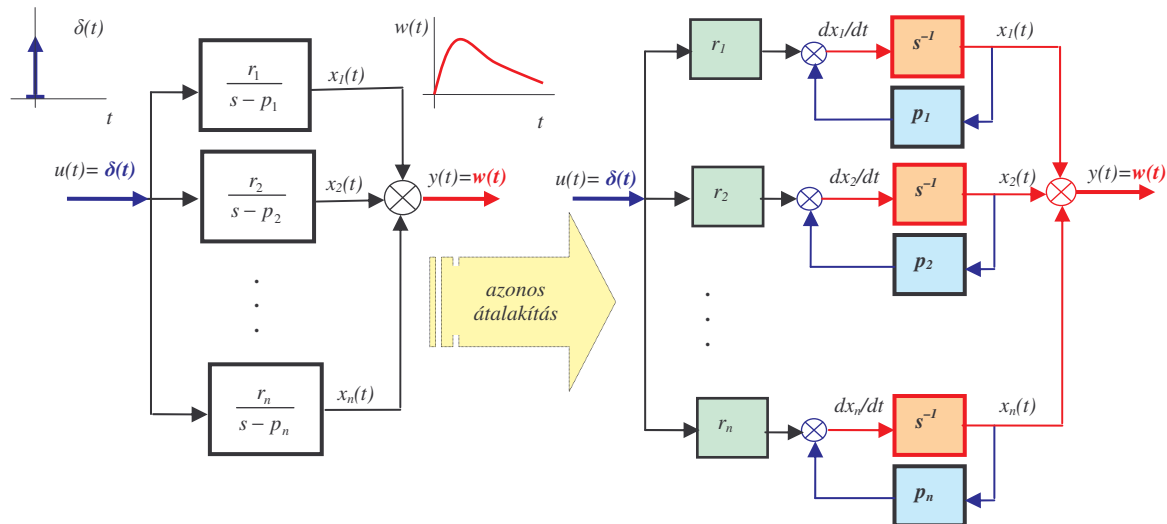
$$y(t) = L^{-1}\{w(s)\} = w(t) = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} = r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} + \dots + r_n e^{p_n t}$$

A részlettöltre bontás eredményeként a $W(s)$ átviteli függvény $r_i/(s-p_i)$ tagok⁴⁹ párhuzamos kapcsolásából felépített hatásvázlata hozható létre, amelyet tovább egyszerűsítve, az egyes párhuzamosan kapcsolt részek $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}$ és Σ lineáris alaptagokból állíthatók elő (lásd 22. ábra).

⁴⁷ A részlettöltre bontást támogató MATLAB függvény: $[r, p, k] = \text{residue}(G, H)$.

⁴⁸ Az átviteli függvény $W(s)=G(s)/H(s)$. A z_i a $G(s)=0$ gyökei ($W(s)$ zérusai), és $W(z_i)=0$. A p_i a $H(s)=0$ gyökei ($W(s)$ pólusai), és $W(p_i)=\infty$. A $p_i=\sigma_i+j\omega_i$ és $p_{i+1}=\sigma_i-j\omega_i$ a póluspárokat célszerű összevonva kezelni. $W(s)$ -nek m számú zérusa, és n számú pólusa lehet. Az $n-m$ a rendszer pólustöbblete, és általában $n-m \geq 0$. Az adott részlettöltre bontásnál feltételeztük, hogy $n>m$, ami az átmeneti függvény $w(0)=0$ jelentésének felel meg.

⁴⁹ Az $f(s)=r/(s-p)$ operátor függvény $L^{-1}\{r/(s-p)\}=r e^{pt}$ inverz transzformáltjának láthatóan alapvető jelentősége van az $y(t)$ időfüggvény meghatározásában.



22. ábra

Az átviteli függvény **párhuzamos** felbontása

Fontos tulajdonsága a *párhuzamos felbontás* alapján kapott struktúrának, hogy most a $H(s)$ karakterisztikus polinomnak nem a $-h_1, -h_2, \dots, -h_n$ együtthatói, hanem a $p_1, p_2, \dots, p_n$ gyökei játszanak meghatározó szerepet az integrátorok visszacsatolásaiban. A $W(s)$ átviteli függvényű tag stabilitása most azt jelenti, hogy a bemeneten ható, egységnyi jelterületű *Dirac* impulzus hatására a kimeneten megjelenő $y(t)=w(t)$ súlyfüggvénytől elvárjuk, hogy $t \rightarrow \infty$ mellett $w(t) \rightarrow 0$ legyen (**vagyis állandósult állapotban a tag a zérus bemenő jelre zérus kimenő jellel válaszoljon**). A hatásvázlat alapján is szemléletesen látható, hogy $y(t)=w(t)$ a párhuzamosan kapcsolt tagok $x_i(t)$ részválaszaiból tevődik össze, és a $w(t) \rightarrow 0$ feltétel betartásához minden részválasznak is zérushoz kell tartania. Ez utóbbi akkor teljesül, ha a $H(s)$ nevező minden gyöke (a $W(s)$ minden p_i pólusa) az s komplex számsík negatív valós részű félsíkján van (mert $t \rightarrow \infty$ mellett $z e^{pt} \rightarrow 0$, ha $\text{real}(p) < 0$). A párhuzamos felbontás alapján – állapotváltozóknak most is az s^{-1} átviteli függvényű integráló tagok kimenő jeleit tekintve – felírható a SISO tag állapotegyenletének egy másik alakja. A hatásvázlat jelöléseivel:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= p_1 x_1(t) + r_1 u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= p_2 x_2(t) + r_2 u(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= p_n x_n(t) + r_n u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)\end{aligned}$$

Vagy mátrix alakban:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}}_B u(t)$$

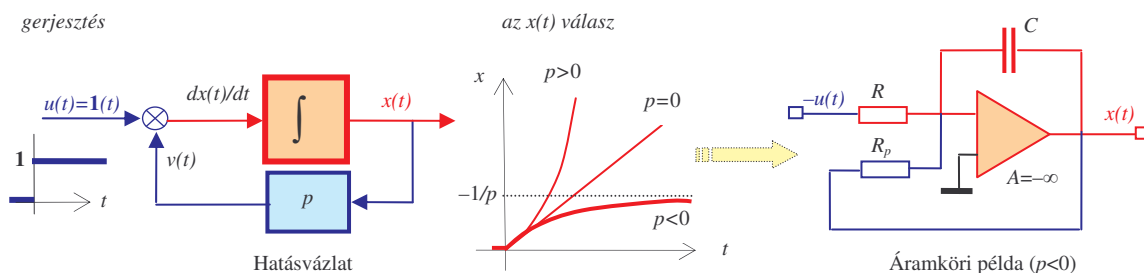
$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_D u(t)$$

Az A állapotmátrix – a $W(s)$ párhuzamos (a részlettörteken alapuló) felbontásának eredményeként – most **diagonális**, főátlójában az egymástól különböző p_i sajátértékekkel. Az állapotegyenletnek ezt az alakját **első kanonikus alaknak** nevezzük⁵⁰. Az integráló tagok száma most is azonos a rendszer n rendszámával, de ezek –

⁵⁰ A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény ismeretében az állapotegyenlet kanonikus alakjának meghatározását támogató **MATLAB** függvények: $[r, p, k] = \text{residue}(G, H)$, vagy $[a, b, c, d] = \text{tf2ss}(G, H) \rightarrow [A, B, C, D, T] = \text{canon}(a, b, c, d)$. Az **első kanonikus alak akkor létezik, ha $W(s)$ minden p_i pólusa egymástól különböző**. A közvetlen felbontásból származó irányíthatósági *kanonikus alak*, illetve a párhuzamos felbontásból származó *első kanonikus alak* más-más állapotváltozókkal írják le **ugyanazt a folyamatot**, de az $u(t)$ bemenet-, és az $y(t)$ kimenet szempontjából egymással egyenértékűek (ha az állapotegyenletek azonos $W(s)$ átviteli függvényből származnak).

ellentétben az irányíthatósági kanonikus alakhoz tartozó struktúrával – most *nem* soros kapcsolású *integrátor lánccolatot*, hanem *párhuzamos* kapcsolást alkotnak.

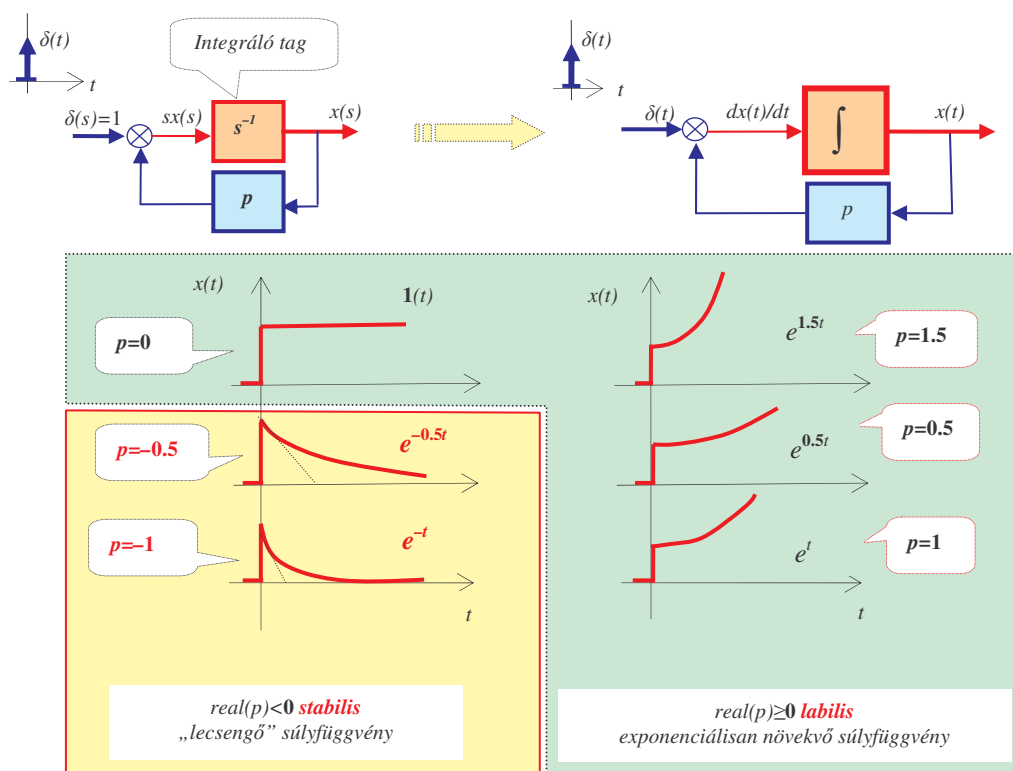
A hatásvázlat dinamikus részének egy eleme: integráló tagnak p átviteli tényezővel rendelkező arányos tagon keresztül történő visszacsatolása. Ennek a struktúrának az egységugrásra adott válaszait (p valós értékét feltételezve) a 23. ábra szemlélteti.



23. ábra
Elsőrendű rendszer átmeneti függvénye

A p pólusnak a dinamikus tulajdonságot alapvetően meghatározó szerepe az ábra alapján is nyilvánvaló⁵¹. A hatásvázlat $p=0$ tényezőjének az áramköri illusztrációban $R_p=\infty$ felel meg, ekkor az integráló tag nincs visszacsatolva. Ha a kapcsolás bemenetére $u(t)=1(t)$ ugrásjelet adunk, akkor $p=0$ esetén az integráló tag $x(t)$ kimenő jele időben lineárisan növekszik. Ha $p<0$ negatív, az integráló tag *negatívan visszacsatolt*, ezért az ugrásjelre adott $x(t)$ válasza csak addig növekedhet, amíg $dx(t)/dt=1(t)+px(t)>0$. Ha $x(\infty)=1/abs(p)$, $v(\infty)=px(\infty)=-1$ és ezért $dx(t)/dt|_{t=\infty}=0$. Ekkor a rendszer stabilis, van állandósult állapota, ami az integráló tag negatív visszacsatolásának a következménye. Alapvetően más a helyzet $p>0$ pozitív visszacsatolás mellett, ekkor $x(t)$ exponenciálisan növekszik. (Az adott áramköri illusztráció a műveleti erősítő fázisfordító tulajdonsága, és $R_p>0$ miatt csak a negatív visszacsatolás szemléltetésére alkalmas).

Az elemi alapstruktúra $\delta(t)$ Dirac deltára adott lehetséges válaszait a 24. ábrán foglaltuk össze.



24. ábra
Elsőrendű rendszer súlyfüggvényei

⁵¹ A $p=0$ eset a stabilitás határhelyzete. Gyakorlati szempontból azonban ezt is a labilis rendszerhez soroljuk, mert állandósult állapotban *zérus* bemenő jel mellett a kimeneten *állandó* (és nem a zérus bemenő jelnek megfelelően zérus) kimenőjel van. A komplex pólusok $p=\sigma\pm j\omega$ konjugált komplex pólus párban fordulhatnak elő. Ilyen esetben a transziensek lengésekkel tartanak zérus (ha $realp=\sigma<0$), vagy végtelen (ha $realp=\sigma>0$) felé, illetve harmonikus lengőmozgás keletkezhet, ha $\sigma=0$, ($p=\pm j\omega$).

Az $x(t)$ állapotváltozó időfüggvényeinek lefolyásából ismételtlen levonható következtetés: **az elsőrendű rendszer aszimptotikus stabilitása akkor biztosított, ha az integráló tag negatívan visszacsatolt**, vagyis $p < 0$. A $W(s) = G(s)/H(s)$ átviteli függvény párhuzamos felbontása alapján igen szemléletesen jelenik meg a $H(s) = 0$ karakterisztikus egyenlet p_i gyökeinek ($W(s)$ pólusainak) a jelentősége, mivel az integráló tagok visszacsatolásaiban ezeknek a pólusoknak a számértékei szerepelnek. Ha ezek valamelyike pozitív szám, az adott integráló tag pozitívan visszacsatolt részstruktúrát alkot, ami a teljes rendszer labilitásának is biztos jele.

6. Az alaplátmátrix meghatározása

Mint korábban láttuk, a $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$ állapotegyenletnek van analitikus megoldó képlete, nevezetesen:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Ez a látszólag egyszerű megoldó képlet a mátrixalgebrai ismeretekben kevésbé jártas olvasónak azonban problémát jelenthet, mivel benne $\Phi(t) = e^{At}$ mátrix-exponenciális kifejezések szerepelnek. Egy n rendű rendszer esetében a rendszer sajátmozgása $x(t) = \exp(At)x(0)$, ahol $x(0)$ az n számú kezdeti feltételt tartalmazó oszlopvektor, a mátrix-exponenciális exponense pedig az $n \times n$ méretű At mátrixfüggvény:

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} t} = e^{\begin{bmatrix} a_{11}t & \dots & a_{1n}t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & \dots & a_{nn}t \end{bmatrix}} = \phi(t)$$

Ezt a függvényt (a rendszer $\Phi(t)$ alaplátmátrixát⁵²) legegyszerűbben a hatványsorával⁵³ értelmezhetjük, melynek alakja:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} = \phi(t)$$

Láthatóan az **alaplátmátrix** olyan $n \times n$ számú elemet tartalmazó mátrixfüggvény, melynek minden $\varphi_{ij}(t)$ részeleme az t idő végtelen hatványsorával definiált. Ebből a hatványsorból nehezen ismerhető fel egy zárt alak, ezért elsősorban a mátrix-exponenciális értelmezésére, vagy közelítő kiszámítására használjuk. A $\Phi(t)$ alaplátmátrix zárt alakban történő meghatározására többféle módszer létezik⁵⁴, egy egyszerű eljárás az inverz Laplace transzformáción alapszik. A rendszer gerjesztéstől független sajátmozgása:

$$x(s) = L\{x(t)\} = (sI - A)^{-1}x(0) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}x(0) = \phi(s)x(0)$$

$$\phi(s) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \dots & \varphi_{n1}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(s) & \dots & \varphi_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

és innen:

$$\phi(t) = L^{-1}\{\phi(s)\} = \begin{bmatrix} L^{-1}\{\varphi_{11}(s)\} & \dots & L^{-1}\{\varphi_{n1}(s)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L^{-1}\{\varphi_{n1}(s)\} & \dots & L^{-1}\{\varphi_{nn}(s)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Az alaplátmátrix – a lineáris rendszerek analízisében gyakran felhasznált – néhány jellegzetes tulajdonsága:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \right) = \phi(0) = I \\ \phi^{-1}(t) &= (e^{At})^{-1} = e^{A(-t)} = \phi(-t) \\ \phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) &= e^{A(t_2 - t_1)}e^{A(t_1 - t_0)} = e^{A(t_2 - t_0)} = \phi(t_2 - t_0) \\ (\phi(t))^k &= (e^{At})^k = e^{A(kt)} = \phi(kt) \end{aligned}$$

⁵² A $\Phi(t)$ alaplátmátrixot *állapotátmeneti* mátrixnak, illetve *átmeneti* mátrixnak is nevezik.

⁵³ Az e^{at} exponenciális függvény hatványsora: $e^{at} = 1 + at + (at)^2/2! + (at)^3/3! + \dots = \sum (at)^j/j!$. Esetünkben $at \rightarrow At$.

⁵⁴ Ilyen módszer pl. az itt nem részletezett *Sylvester* képlet. Irodalom: Dr. Csáki Frigyes: Fejezetek a szabályozástechnikából. Állapotegyenletek.

Példa

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} &\Rightarrow (sI - A) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \\
 \phi(s) = (sI - A)^{-1} &= \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{-2}{s^2 + 3s + 2} & \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix} \\
 \phi(t) = L^{-1}\{\phi(s)\} &= L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{-2}{s^2 + 3s + 2} & \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}\right\} & L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right\} \\ L^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2 + 3s + 2}\right\} & L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 3s + 2}\right\} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Különösen egyszerűen számítható a $\Phi(t) = e^{At}$ alpmátrix, ha az A állapotmátrix diagonális, főátlójában az egymástól különböző p_i sajátértékeivel⁵⁵. Ekkor:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(t) = e^{At} = e^{\begin{bmatrix} p_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_n t \end{bmatrix}} = e^{\begin{bmatrix} p_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_n t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{p_n t} \end{bmatrix}$$

Ismételten megjegyezzük, hogy a $W(s)$ átviteli függvény **párhuzamos felbontása** alapján meghatározható állapotegyenlet A állapotmátrixa **diagonális**, ami a számításokat jelentősen egyszerűsítheti.

7. Tagok csoportosítása az átmeneti⁵⁶ függvényük alapján. Az önbeálló tag statikus karakterisztikája

Az n rendű, SISO tag differenciálegyenlete, állapotegyenlete, és átviteli mátrixa (átviteli függvénye):

$$\begin{aligned}
 a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) &= b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t) \\
 \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
 W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D &= \frac{\text{Cadj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{y(s)}{u(s)}
 \end{aligned}$$

Mivel az A állapotmátrix mérete $n \times n$, valamint a SISO tag egy bemenete ($j=1$), és az egy kimenete ($k=1$), következményeként, C sorvektor, B oszlopvektor, D pedig skaláris, ezért az átviteli mátrix az adott esetben egyetlen átviteli függvényt tartalmaz. Ez most a kimenő-, és a bemenő jelek Laplace transzformáltjának hányadosaként is értelmezhető: $W(s) = y(s)/u(s)$. A SISO tag $W(s)$ átviteli függvénye olyan algebrai tört, amelynek $H(s) = \det(sI - A) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ nevezője s -nek n fokszámú-, $G(s) = \text{Cadj}(sI - A)B + D \det(sI - A) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m$ számlálója pedig s -nek $0 \leq m \leq n$ fokszámú polinomjai. $W(s)$ általános alakja tehát:

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{b_m + b_{m-1}s + \dots + b_1 s^{m-1} + b_0 s^m}{a_n + a_{n-1}s + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

b_k, a_k : valós paraméterek, és $m \leq n$

$W(s)$ pólus–zérus eloszlást kifejező, és időállandós normál alakjai:

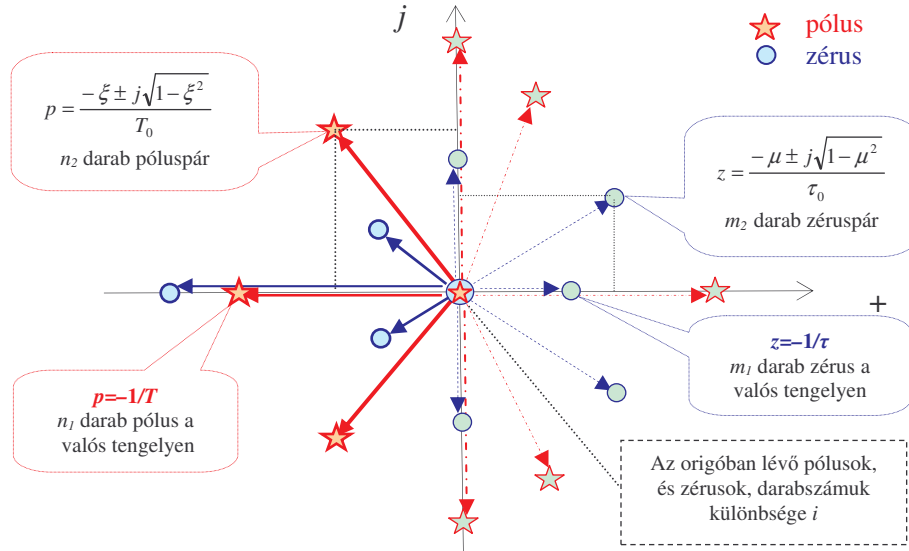
⁵⁵ Az átviteli függvény **párhuzamos felbontása** alapján – ha a p pólusok mindegyike egymástól különbözik – a SISO tag állapotegyenletének mindig létezik olyan alakja, melyben az állapotmátrix **diagonális**. A közvetlen felbontásához az állapotegyenlet irányíthatósági kanonikus alakja (**integrátorok láncolata**), a párhuzamos felbontásához pedig az ún. első kanonikus alakja (**integrátorok párhuzamos kapcsolása**) tartozik.

⁵⁶ A tag átmeneti függvénye az $u(t) = \mathbf{1}(t)$ vizsgálgó jelre adott $y(t) = v(t)$ válasza, zérus kezdeti feltételek mellett. Az átmeneti függvény kísérletileg is meghatározható.

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} = k \frac{\prod_{l=1}^{m_1} (1 + s\tau_l) \prod_{l=1}^{m_2} (1 + 2\mu_l\tau_{0l}s + \tau_{0l}^2s^2)}{s^i \prod_{l=1}^m (1 + sT_l) \prod_{l=1}^{n_2} (1 + 2\xi_l T_{0l}s + T_{0l}^2s^2)}$$

$$m_1 + 2m_2 = m, \quad i + n_1 + 2n_2 = n$$

A lehetséges pólus–zérus eloszlást a 25. ábra szemlélteti.



25. ábra

Az átviteli függvény lehetséges pólus–zérus eloszlása

A zérusok, illetve a pólusok vagy a valós tengelyen vannak ($-1/T$, $-1/\tau$), vagy ha valamelyikük komplex szám, akkor ennek konjugáltja is jelen van. Az origóban lévő pólusok, és zérusok „kiejtik egymást”, és i számú pólus, vagy zérus marad meg az átviteli függvényben⁵⁷ ($i > 0$ esetében az origóban lévő pólusok száma a nagyobb, szemben az $i < 0$ esettel, amikor a zérusok száma a nagyobb). Az időállandós alak másodfokú tényezőiben a konjugál komplex párokat összevontuk⁵⁸, ezekben $T_0 > 0$ és $\tau_0 > 0$ pozitív értékek, szemben a ξ és a μ paraméterekkel, amelyek a $-1 < \xi < 1$, $-1 < \mu < 1$ intervallumban vehetnek fel értékeket. Ha $W(s)$ minden pólusa negatív ($p = -1/T < 0$, vagyis $T > 0$), vagy negatív valós részű ($0 < \xi \leq 1$), akkor $H(s)$ Hurwitz polinom, és a tag aszimptotikusan stabilis. Ha még ezen túlmenően minden zérus is negatív ($z = -1/\tau < 0$, vagyis $\tau > 0$), vagy negatív valós részű ($0 < \mu \leq 1$), akkor a tag ún. **minimum fázisú**. (k a zérusok-, és pólusok szorzatából származtatható tényező).

Ha a bemenőjel $u(t) = u_0 = \text{állandó}$, és ennek hatására $t \rightarrow \infty$ mellett létrejön a kimenő jelnek is az $y(t)_{t \rightarrow \infty} = y(\infty) = y_0 = \text{állandó}$ értéke (az ilyen tulajdonsággal rendelkező a tagot aszimptotikusan stabilis, **önbeálló** tagnak definiáljuk), akkor ebben az állandósult állapotban a jelek differenciálhányadosai zérusok, és ezért $a_n y_0 = b_m u_0$, illetve:

$$y_0 = (-CA^{-1}B + D)u_0 = \frac{b_m}{a_n} u_0 = k u_0$$

ahol $k = -CA^{-1}B + D = b_m/a_n$ a tag **átviteli tényezője** (dc erősítése).

Lineáris SISO tag egyik rendszerjellemező függvénye a **$v(t)$ átmeneti függvény**. Ez a tag $y(t) = v(t)$ kimenő jele, ha a gerjesztő jel $u(t) = \mathbf{1}(t)$ egységugrás, és a kezdeti feltételek zérusok. A $W(s) = G(s)/H(s)$ átviteli függvény ismeretében az átmeneti függvény Laplace transzformáltja illetve ennek inverz transzformáltja⁵⁹ (figyelembe véve, hogy $L\{\mathbf{1}(t)\} = 1/s$):

⁵⁷ i a jelátvivő tag **típuszáma**.

⁵⁸ Ennek az összevonásnak eredményeként a gyöktényezős alak időállandós változatában – annak ellenére, hogy a zérusok, és pólusok között komplex értékek is lehetnek – valós együtthatók szerepelnek.

⁵⁹ Az itt megadott inverz transzformációs formula (a **Heaviside kifejtési tétel**) akkor érvényes, ha a $W(s)$ átviteli függvény $H(s)$ nevezőjének minden gyöke egymástól különböző és egyik gyök sem zérus. Többszörös multipllicitású gyökök esetében más formulák használhatók.

$$y(s) = v(s) = W(s)u(s) = \frac{G(s)}{H(s)} \frac{1}{s}$$

$$y(t) = v(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{sH(s)} \right\} = \frac{G(0)}{H(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{G(p_i)}{s \frac{dH(s)}{ds} \Big|_{s=p_i}} e^{p_i t}$$

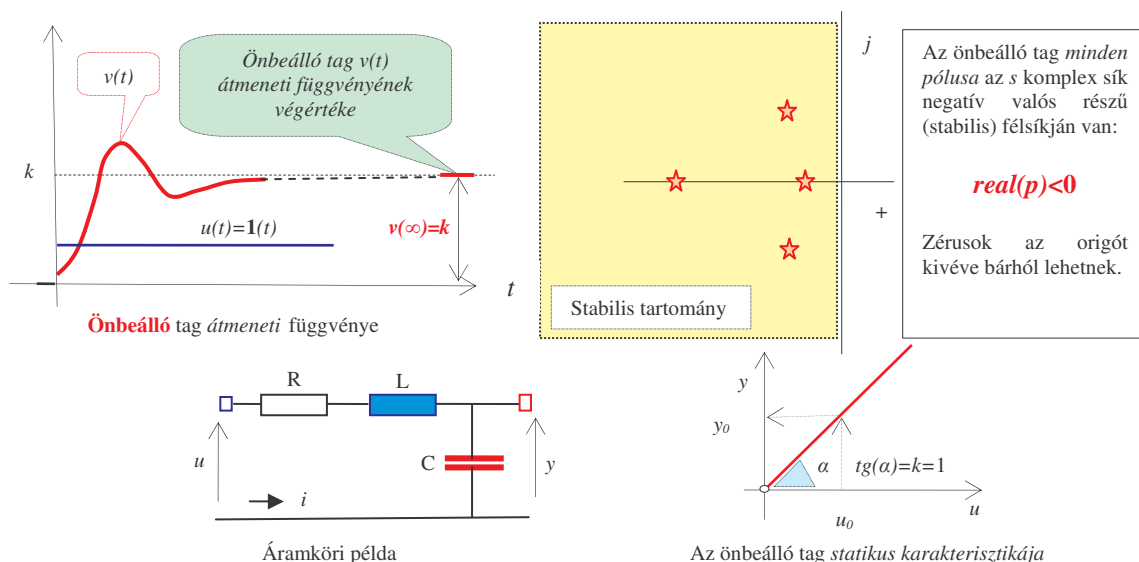
A p_i egymástól különböző és nem zérus pólusok, a $H(s)=0$ karakterisztikus egyenlet $\lambda_i=p_i$ gyökei, amelyek egyébként a rendszer A állapotmátrixának sajátértékei. A $v(t)$ képletéből kiolvashatóan $t \rightarrow \infty$ mellett kizárólag akkor létezik az átmeneti függvénynek $v(\infty)=v_0$ állandósult értéke, ha a p_i pólusok mindegyikére a **$real(p_i) < 0$** feltétel teljesül, mivel ekkor $y(t)$ mindegyik $\exp(p_i t)$ exponenciális komponense zérushoz tart, és ezért $v(\infty)=G(0)/H(0)=b_m/a_n=k$.

Az átmeneti függvény – a rendszer bemenetére ugrásjelet kapcsolva, és a kimenő jelet regisztrálva – kísérletileg is felvehető. A $v(t)$ ismeretében a tag egyéb rendszerjellemző függvényei (az *állapotegyenlet*, az *átviteli függvény*, a *súlyfüggvény*, és a *frekvencia függvény*) is meghatározhatók. Ezt az eljárást az átmeneti függvény alapján történő identifikációnak hívjuk.

Az átmeneti függvény időbeli lefolyása alapján a jelátvivő tagokat egymástól karakterisztikusan elkülönülő csoportokba sorolhatjuk. Ezek a csoportok:

Önbeálló tagok:

■ Az önbeálló (**arányos** jellegű) lineáris tagok jellegzetes tulajdonsága, hogy átmeneti függvényük **végértéke** $v(\infty)=k \neq 0$ **állandó** érték (k az önbeálló tag átviteli tényezője). Ennek jelentése az, hogy a bemeneten működtetett $u(t)=u_0 \mathbf{1}(t)$ gerjesztés hatására keletkező $y(t)$ kimenő jel a tranziensek lejátszódása után egy $y(\infty)=ku_0$ állandó (de nem zérus) értékre beáll. Mindezekből az is következik, hogy az önbeálló tagnak értelmezhető az $y_0=y(u_0)=ku_0$ **statikus karakterisztikája**, amely az állandósult y_0 és u_0 közötti kapcsolatot egy grafikon alakjában fejezi ki. Ez a karakterisztika lineáris tag esetében egy (az u független változó koordináta tengelyével α szöget bezáró) k meredekséggel rendelkező, és az origót átmenő egyenes. Az önbeálló tag átviteli függvényének minden **pólusa** negatív, vagy negatív valós részű, vagyis az önbeálló tag aszimptotikusan stabilis. **A zárt szabályozási rendszer u_a alapjele, és y szabályozott jellemzője közötti jelátviteli tulajdonságot is az önbeállóságnak kell jellemeznie, mivel állandósult állapotban a szabályozott jellemzőnek arányosnak kell lennie az y_a alapértéket megjelenítő u_a alapjellel.** Az önbeálló tag átmeneti függvényének jellegzetes grafikonja (lásd 26.ábra):



$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} \Rightarrow LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

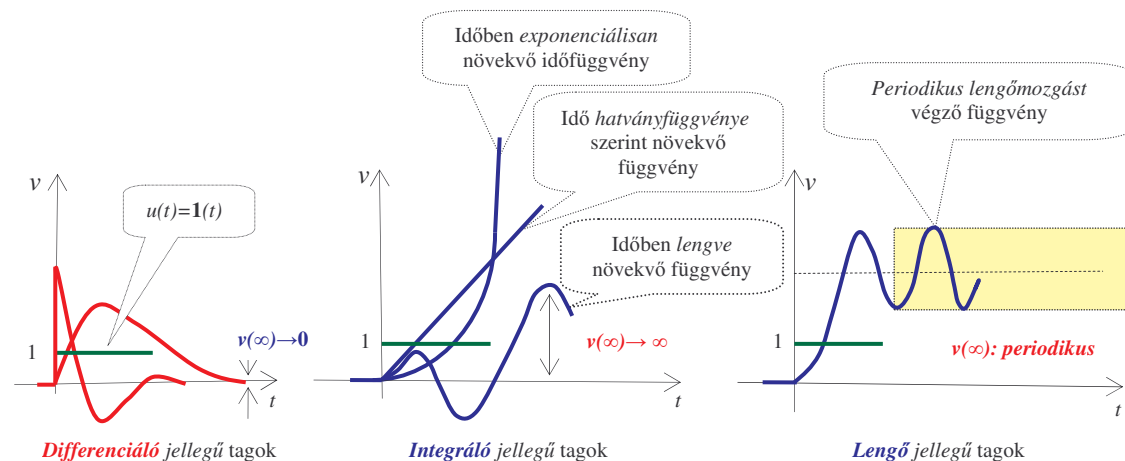
26. ábra
Az önbeálló tagok tulajdonságai

Nem önbeálló tagok:

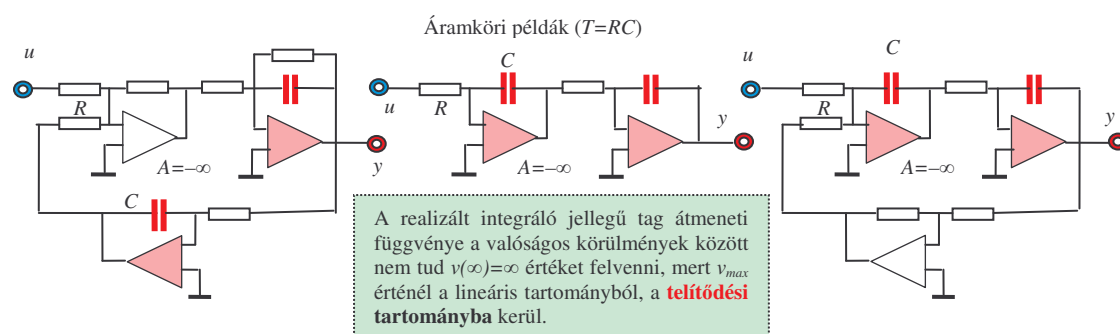
A nem önbeálló tagok jellegzetes tulajdonsága, hogy:

- ▣ átmeneti függvényük végértéke **zérus** (*differentiáló* jellegű tagok), vagy
- ▣ átmeneti függvényük végértéke **végtelen** (*integráló* jellegű tagok), vagy
- ▣ átmeneti függvényük kvázistacioner állapotban periodikus **lengőmozgást** végez (*lengő* jellegű tagok).

A nem önbeálló tagokra a statikus karakterisztika nem értelmezhető, mivel ezek az állandó bemenő jelre és állandósult állapotban vagy zérus-, vagy pedig nem állandó kimenő jellel válaszolnak. A nem önbeálló tagok átmeneti függvényeinek jellegzetes grafikonjai (lásd 27.ábra):



Nem önbeálló tagok átmeneti függvényei



Kéttárolós differenciáló áramkör

Kétszeresen integráló áramkör

Oscillátor

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{1+sT}}{1 + \frac{1}{1+sT} \frac{1}{sT}} = \frac{sT}{1+sT+s^2T^2}$$

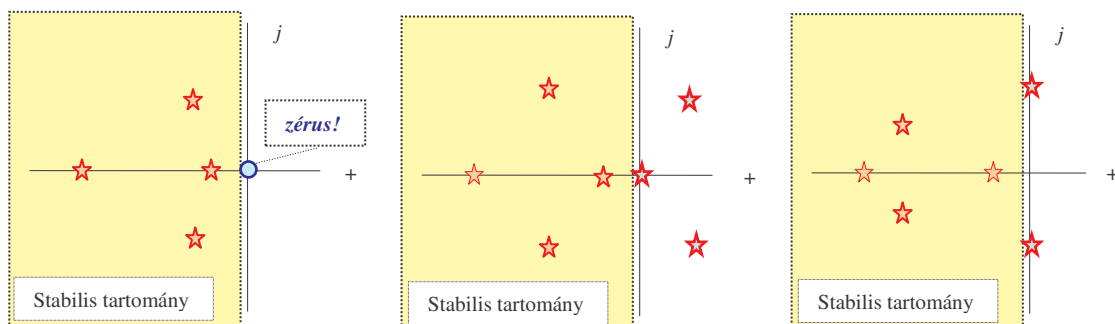
$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T \frac{du(t)}{dt}$$

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \left(-\frac{1}{sT}\right) \left(-\frac{1}{sT}\right) = \frac{1}{s^2 T^2}$$

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t)$$

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 T^2}}{1 + \frac{1}{s^2 T^2}} = \frac{1}{1+s^2 T^2}$$

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$$



A differenciáló jellegű tag **minden** pólusa az s komplex sík negatív valós részű (stabilis) félsíkján van, és legalább egy **zérusa van az origóban**:

$$\text{real}(p) < 0, \quad z = 0!$$

Az integráló jellegű tagnak pólusai **lehetnek** az s komplex sík negatív valós részű (stabilis) félsíkján, és pólusai **vannak** az sík pozitív valós részű (labilis) félsíkján, vagy az origóban:

$$\text{real}(p) < 0, \quad \text{real}(p) > 0!, \quad p = 0!$$

A lengő jellegű tagnak pólusai **lehetnek** az s komplex sík negatív valós részű (stabilis) félsíkján, és **egyszeres multiplicitású** pólusa **van** az s komplex sík képzetes tengelyén:

$$\text{real}(p) < 0, \quad \text{real}(p) = 0!$$

27. ábra

A nem önbeálló tagok tulajdonságai

Az átmeneti függvényekből láthatóan, az aszimptotikusan stabilis önbeálló tagok állandó gerjesztésre, állandósult állapotban, állandó értékű kimenő jel választ adnak. *Nem így az **integráló** jellegű és a **lengő** tagok*, amelyeknek kimenő jelei az állandó bemenő jel hatására állandó kimenő jelet felvenni nem képesek (gerjednek)

Az átviteli függvényüknek pólusai lehetnek az s sík origójában, a képzetes tengelyen konjugált komplex póluspárban, és a pozitív valós részű félsíkon. A differenciálógépjellegű tagok ugyan aszimptotikusan stabilisak, de bármekkora is az állandó bemenő jelük értéke, a kimenő jelük állandósult értéke minden esetben zérus⁶⁰. Az átviteli függvényük jellegzetes tulajdonsága a stabilis pólusok, valamint az *origóban lévő zérus* jelenléte.

Megjegyzés

Az előzőekben a **SISO** tag n -ed rendű, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletét a vezető együtthatóra normalizált alakjában használtuk, ami a karakterisztikus egyenletének is egységnyi vezető együtthatót eredményezett:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

az a_0 vezető együtthatóra normalizálva $h_i = \frac{a_i}{a_0} \quad i: 0, 1, \dots, n \quad g_i = \frac{b_i}{a_0} \quad i: 0, 1, \dots, m$

$$\frac{a_0}{a_0} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \frac{a_1}{a_0} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{a_n}{a_0} y(t) = \frac{b_0}{a_0} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \frac{b_1}{a_0} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{a_0} \frac{du(t)}{dt} + \frac{b_m}{a_0} u(t)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + g_m u(t)$$

$$\det(sI - A) = s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n = 0$$

Normalizálhatunk azonban az $y(t)$ kimenő jel $a_n \neq 0$ együtthatójára is. Ekkor:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

az a_n együtthatóra normalizálva $T_i = \frac{a_i}{a_n} \quad (i: 0, 1, \dots, n) \quad \tau_i = \frac{b_i}{b_m} \quad (i: 0, 1, \dots, m) \quad k = \frac{b_m}{a_n}$:

$$\frac{a_0}{a_n} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{b_0}{a_n} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \frac{b_1}{a_n} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{a_n} \frac{du(t)}{dt} + \frac{b_m}{a_n} u(t)$$

$$= \frac{b_m}{a_n} \left[\frac{b_0}{b_m} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \frac{b_1}{b_m} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m} \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right]$$

$$T_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + T_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[\tau_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \tau_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \tau_1 \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right]$$

Ebben az alakban a $d^{n-i} y(t)/dt^{n-i}$ tényező a_i/a_n együtthatójának-, illetve a $d^{m-i} u(t)/dt^{m-i}$ tényező b_i/b_m együtthatójának dimenziója $[\text{sec}^{n-i}]$, $[\text{sec}^{m-i}]$. Ez azért van így, mert kizárólag azonos dimenzióval rendelkező mennyiségek összegezhetők, vagyis

$$\dim \left[\frac{a_i}{a_n} \frac{d^{n-i} y(t)}{dt^{n-i}} \right] = \dim[y(t)] \quad (i: 1, 2, \dots, n) \quad \dim \left[\frac{b_i}{b_m} \frac{d^{m-i} u(t)}{dt^{m-i}} \right] = \dim[u(t)] \quad (i: 0, 1, \dots, m)$$

Mindezek miatt T_i [sec], illetve τ_i [sec] idődimenziós együtthatók bevezetésével is felírhatjuk a differenciálegyenletet. Ebben az alakban $k=b_m/a_n$ a tag átviteli tényezője (dc erősítése), és $\dim[k]=\dim[y]/\dim[u]$. Ez utóbbi alakban a tag differenciálegyenletéhez rendelhető átviteli függvény és karakterisztikus egyenlet:

$$W(s) = k \frac{1 + s\tau_1 + s^2\tau_2^2 + \dots + s^m\tau_m^m}{1 + sT_1 + s^2T_2^2 + \dots + s^nT_n^n}$$

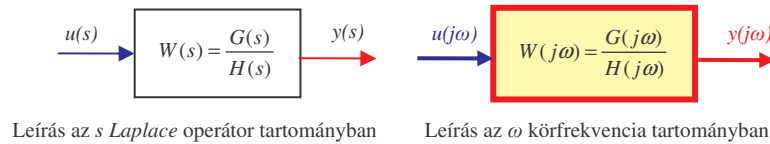
$$\det(sI - A) = s^n T_n^n + s^{n-1} T_{n-1}^{n-1} + \dots + sT_1 + 1 = 0$$

Ha a tag önbeálló (vagyis karakterisztikus egyenletének minden gyöke az s sík stabilis félsíkján van), akkor az állandó u_0 gerjesztésre, állandósult állapotban $y_0=ku_0$ állandó választ ad.

⁶⁰ Az önbeálló és a differenciálógépjellegű tagok *passzív* (pl. **R, L, C** áramköri *elemekből*) felépülhetnek, az integráló és a lengő tagok működéséhez *aktív* (segédenergiát felhasználó) egységek is szükségesek. Mindez abból következik, hogy a minden határon túl növekvő, vagy az állandósult lengéseket végző jelek fenntartása külső forrásból származó energiát igényel. A realizálható fizikai rendszerekben az integráló jellegű tagok átmeneti függvényeinek növekedése természetesen nem érheti el a $v(\infty)=\pm\infty$ értéket, mert előbb-utóbb (a telítődés -, vagy valamilyen üzemzavar miatt) $v(t)$ növekedése leáll.

8. Lineáris SISO tag frekvencia függvénye

A lineáris tag $W(j\omega)$ frekvencia függvénye a szabályozási rendszer analízisében, és szintézisében jelentős szerepet játszik. A szabályozási rendszer stabilitásvizsgálata, a szabályozó méretezése, *Bode* tételein, és a frekvenciafüggvény alapján történik. Mindezek miatt a frekvencia függvény fogalma az alapismereteknek szerves része. A frekvencia függvény lényegét tekintve arra ad felvilágosítást, hogy az aszimptotikusan stabilis lineáris tag a különféle ω körfrekvenciájú harmonikus jeleket miként engedi magán keresztül, vagyis a dinamikus rendszer – mint szűrő – milyen viselkedést mutat (lásd 28.ábra).



28. ábra

Jelátvivő tag leírása az átviteli-, és a frekvencia függvényével

Ha az $u(t)$ bemenő-, és az $y(t)$ kimenő jelű SISO tag *holtidő mentes*, akkor a $W(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvénye polinomok hányadosaként előállítható algebrai tört⁶¹. Általános, gyöktényezős normálalakja (feltételezve, hogy komplex sík origójában r számú zérus-, illetve q számú pólus van):

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n} = g_0 \frac{\prod_{l=1}^m (s - z_l)}{\prod_{l=1}^n (s - p_l)} = \frac{k_0}{s^i} \frac{\prod_{l=r+1}^m (1 - \frac{s}{z_l})}{\prod_{l=q+1}^n (1 - \frac{s}{p_l})}$$

Ebben g_l és h_l a számláló, és a nevező valós együtthatói, z_l a számláló gyökei ($W(s)$ $z_l \neq 0$ zérusai), p_l a nevező gyökei ($W(s)$ $p_l \neq 0$ pólusai), $i=q-r$ a tag típusszáma, és k_0 egy állandó tényező. A számláló fokszáma m , a nevező fokszáma n , és realizálható $W(s)$ esetében $n \geq m$ (a számláló fokszáma nem haladhatja meg a nevező fokszámát). A g_l és h_l együtthatók valós voltából következik, hogy a z_l zérusok és a p_l pólusok a komplex sík valós tengelyére szimmetrikusan helyezkednek el⁶². Ha bevezetjük a k , τ_l , τ_{ol} , μ_l , T_l , T_{ol} , ξ_l jelöléseket, és a konjugált komplex zérus-párokat, és pólus-párokat másodfokú alakra összevonjuk⁶³, akkor $W(s)$ ún. **időállandós normálalakját** kapjuk:

$$W(s) = \frac{k}{s^i} \frac{\prod_{l=1}^{m_1} (1 + s \tau_l) \prod_{l=1}^{m_2} (1 + 2\mu_l \tau_{ol} s + \tau_{ol}^2 s^2)}{\prod_{l=1}^{n_1} (1 + s T_l) \prod_{l=1}^{n_2} (1 + 2\xi_l T_{ol} s + T_{ol}^2 s^2)}$$

Ez a kifejezés azt szemlélteti, hogy a $W(s)$ átviteli függvénynek i számú pólusa ($i \geq 1$)-, vagy zérusa ($i \leq -1$), van a komplex sík origójában (i $W(s)$ típusszáma és $i=0$ esetben nincs az origóban sem zérus, sem pólus, vagy ha van, a számuk azonos: $q=r$), m_1 számú zérusa és n_1 számú pólusa van a valós tengelyen, illetve m_2 számú konjugált komplex zérus-párja, és n_2 számú konjugált komplex pólus-párja van a komplex síkon⁶⁴.

A jelátvivő tag $W(j\omega)$ frekvencia függvénye a $W(s)$ átviteli függvényéből származtatható:

$$W(j\omega) = W(s)_{s=j\omega}$$

A formális megfeleltetés mögött tartalmi összefüggés van, melynek matematikai háttere a *Fourier*-, illetve a *Laplace* integrál-transzformációk közötti kapcsolat alapszik. Ennek részletezésére itt nem térünk ki, e helyett fizikai magyarázattal indokoljuk ezt a kapcsolatot.

A lineáris tag jelátviteli tulajdonságaira érvényes a **szuperpozíció elve**, amelynek értelmében, ha az $u(t)$ periodikus bemenőjel mindegyik harmonikus komponensére meghatározzuk a kimenőjel részválaszt, akkor a

⁶¹ Ha a $W(s)$ átviteli függvény $\exp(-sT_h)$ tényezőt is tartalmaz, akkor ez egy további algebrai törttel (*Pade*, *Strejc*) közelíthető.

⁶² Az algebra alaptétele: Az n fokú, valós együtthatójú polinomnak n gyöke van, és ezek a gyökök valós számok, és konjugált komplex számpárok lehetnek.

⁶³ Pólusokra: $(s-p_l)(s-p_{l+1}) = [s-(\sigma_l + j\omega_l)][s-(\sigma_l - j\omega_l)] = s^2 - 2\sigma_l s + \sigma_l^2 + \omega_l^2 = (s^2 + \omega_l^2)[1 - 2\sigma_l s / (\sigma_l^2 + \omega_l^2) + s^2 / (\sigma_l^2 + \omega_l^2)] = k_l(1 + 2\xi_l T_{ol} s + T_{ol}^2 s^2)$, $k_l = \sigma_l^2 + \omega_l^2$, $\xi_l = -\sigma_l / \sqrt{\sigma_l^2 + \omega_l^2}$, $T_{ol} = 1 / \sqrt{\sigma_l^2 + \omega_l^2}$. Hasonlóan a zérusokra: $(s-z_l)(s-z_{l+1}) = k_l(1 + 2\mu_l \tau_{ol} s + \tau_{ol}^2 s^2)$.

⁶⁴ Ha minden pólus, és minden zérus negatív valós, vagy negatív valós részű, $W(s)$ *minimumfázisú*, és *aszimptotikusan stabilis* tagot definiál. A komplex pólus-, és zérus párok összevonásával az átviteli függvény időállandós normálalakjában szereplő k , τ , τ_o , μ , T , T_o , ξ paraméterek mindegyike valós szám.

részválaszok összegéből fog felépülni az eredeti $u(t)$ -re adott $y(t)$ válasz is. Mindezekből az következik, hogy a **SISO** tag jelátvitelének egyik fontos alapkérdése, hogy a tag $u(t)=u_{\max}\cos(\omega t)$ harmonikus jelre, kvázistacioner állapotban⁶⁵ milyen választ ad. További vizsgálatainkban az $u(t)$ jelet a komplex írásmódnak megfelelően $\tilde{u}=u_{\max}e^{j\omega t}=u_{\max}[\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)]$ komplex jel valós részének tekintjük. Ez a komplex írásmód a számításokat jelentősen egyszerűsíti. A linearitásból következik, hogy a stabilis tag $\tilde{y}(t)=u_{\max}e^{j\omega t}$ komplex jelre adott válaszát, **kvázistacioner** állapotban $\tilde{y}(t)=y_{\max}(\omega)e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}$ komplex alakban kereshetjük, és a tényleges választ ennek valós részeként kapjuk. A jelek kvázistacioner időfüggvényeinek ki kell elégíteniük a tag átviteli függvényéből is származtatható

$$h_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + g_m u(t)$$

n rendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletét. Az $\tilde{u}$ és az $\tilde{y}$ jeleket a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$[h_0(j\omega)^n + h_1(j\omega)^{n-1} + \dots + h_{n-1}(j\omega) + h_n] y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} = [g_0(j\omega)^m + g_1(j\omega)^{m-1} + \dots + g_{m-1}(j\omega) + g_m] u_{\max} e^{j\omega t}$$

Ebből egyenletrendezés, és $e^{j\omega t}$ -vel történő egyszerűsítés után:

$$y_{\max} e^{j\varphi} = \frac{g_0(j\omega)^m + g_1(j\omega)^{m-1} + \dots + g_{m-1}(j\omega) + g_m}{h_0(j\omega)^n + h_1(j\omega)^{n-1} + \dots + h_{n-1}(j\omega) + h_n} u_{\max}$$

$$\frac{y_{\max}}{u_{\max}} e^{j\varphi} = \frac{g_0(j\omega)^m + g_1(j\omega)^{m-1} + \dots + g_{m-1}(j\omega) + g_m}{h_0(j\omega)^n + h_1(j\omega)^{n-1} + \dots + h_{n-1}(j\omega) + h_n} = W(j\omega) = a(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

A kapott eredményből következik, hogy az $y_{\max}/u_{\max}$ hányados egy adott ω körfrekvencián a $W(j\omega)$ komplex szám $a(\omega)$ abszolút értéke⁶⁶, az $u_{\max}\cos(\omega t)$ bemenő jelre adott, kvázistacioner $y_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ kimenő jelnek a bemenő jelhez képesti $\varphi(\omega)$ fázisszöge pedig a $W(j\omega)$ komplex szám szöge. Mind az **$a(\omega)=absW(j\omega)$** , mind pedig a **$\varphi(\omega)=arcW(j\omega)$** az ω körfrekvencia függvénye. A differenciálegyenlet g és h együtthatóinak ismerete $W(s)$, illetve $W(j\omega)$ ismeretét is jelenti. Mindezek figyelembevételével:

$$\frac{y_{\max}}{u_{\max}} = absW(j\omega) = a(\omega) = \sqrt{\{real[W(j\omega)]\}^2 + \{imag[W(j\omega)]\}^2}$$

$$arcW(j\omega) = \varphi(\omega) = \arctg \frac{imag[W(j\omega)]}{real[W(j\omega)]}$$

A **$W(j\omega)$ frekvencia függvény** formálisan a $W(s)$ átviteli függvény $s=j\omega$ helyen vett helyettesítésével határozható meg. Időállandós normálalakja is az átviteli függvény normálalakjából számítható:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^i} \frac{\prod_{l=1}^{m_1} (1 + j\omega\tau_{l1}) \prod_{l=1}^{m_2} [1 + 2\mu_{l2}\tau_{ol}j\omega + \tau_{ol}^2(j\omega)^2]}{\prod_{l=1}^{n_1} (1 + j\omega T_{l1}) \prod_{l=1}^{n_2} [1 + 2\xi_{l2}T_{ol}j\omega + T_{ol}^2(j\omega)^2]}$$

A frekvencia függvény ábrázolása⁶⁷

Ha egy adott ω körfrekvencián ismert a $W(j\omega)$ komplex szám értéke, akkor az aszimptotikusan stabilis lineáris tag $u(t)=u_{\max}\cos(\omega t)$ -re adott kvázistacioner $y(t)=y_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ válaszában $y_{\max}=abs[W(j\omega)]u_{\max}=a(\omega)u_{\max}$, illetve $\varphi(\omega)=arcW(j\omega)$ ⁶⁸. Miután egy periodikus bemenőjelnek az alapharmonikusán túlmenően, igen nagy számú felharmonikusa is lehet, ezért a kimenő jel egyes komponenseinek meghatározásához a $0 < \omega < \infty$ körfrekvencia intervallum minden ω értékére ismerni kell $W(j\omega)$ számértékét⁶⁹. Ez egy matematikai kifejezés formájában ugyan megadható, de ettől szemléletesebb, ha a $W(j\omega)$ függvényt ábrázoljuk. Az ábrázolásnak többféle lehetősége van.

⁶⁵ Ha dinamikus rendszer bemenetére $u(t)=u_{\max}\cos(\omega t)$ jelet ugrásszerűen kapcsoljuk, akkor *kellő idő eltelte után* (amikor a sajátmozgás komponensei már elhanyagolható mértékben vesznek részt a kimenőjelben) a kimeneten $y(t)=y_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ jel figyelhető meg. Ez az üzemi helyzet a kvázistacioner állapot, *ami akkor létezik, ha a jelátvivő tag aszimptotikusan stabilis*. Fontos tulajdonság, hogy a kimenő jel ω körfrekvenciája (kvázistacioner állapotban) azonos a bemenő jel ω körfrekvenciájával.

⁶⁶ Célszerűen $u_{\max}=1$, és ekkor $y_{\max}=a(\omega)$.

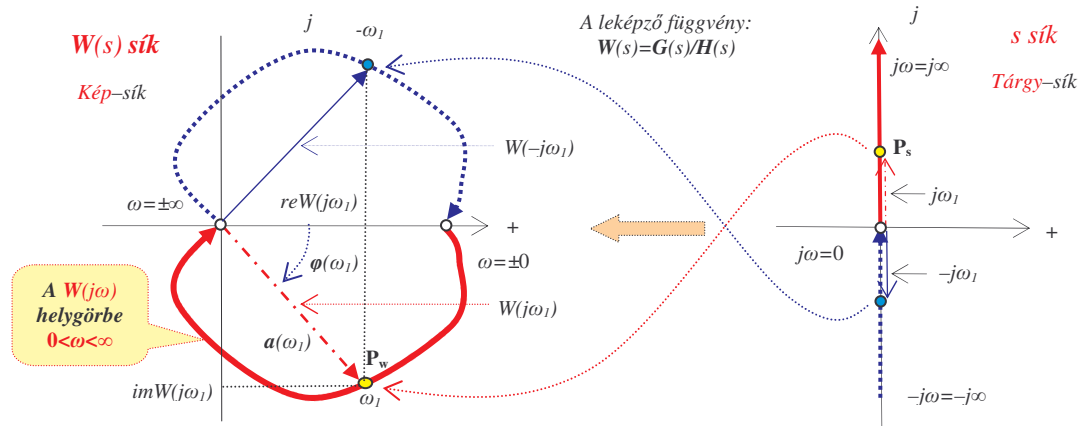
⁶⁷ A lineáris tag $W(j\omega)$ frekvencia függvényének számítását, és ábrázolását a **MATLAB nyquist, bode, margin**, utasításai támogatják. A helygörbére tett nyíl az ω körfrekvencia növekedésének irányát mutatja.

⁶⁸ Például ha $\omega=314$ rad/sec körfrekvencián $W(j\omega)_{\omega=314}=3-4j$, akkor $a(\omega)=\sqrt{9+16}=5$, és $y_{\max}=5u_{\max}$, valamint $\varphi(\omega)=\arctg(-4/3)=-0.9273$ rad $\rightarrow -53.1301^\circ$.

⁶⁹ Ha $u(t)$ nem periodikus, de *Fourier* integrálja létezik, akkor a frekvencia spektrumában minden körfrekvenciájú komponens jelen van.

A Nyquist helygörbe származtatása konformis⁷⁰ leképzéssel

Az ábrázolás egyik formája a komplex számsíkon ábrázolt Nyquist helygörbe. Ezt a helygörbét egy olyan képfüggvénynek tekinthetjük, ahol a tárgyfüggvény az s sík $s=j\omega$ pozitív képzetes tengelye, amit a $W(s)$ függvény által meghatározott kifejezés a $W(s)$ síkra képez le. A $W(s)$ síkon az s sík $s=j\omega$ pozitív képzetes tengelyének képe a **$W(j\omega)$ Nyquist diagram**. Ábrázolva (lásd 29. ábra):



29. ábra
Az s sík imaginárius tengelyének leképzése a $W(s)$ síkra

Ha az s -síki képzetes tengelyének minden $j\omega$ értékére meghatározzuk az $a(\omega)$ hosszúságú, és $\varphi(\omega)$ szögű komplex $W(j\omega)$ vektort (vagy az s síki P_s pontjának képét a $W(s)$ síkon: a P_w képpontot), akkor e vektorok végpontjainak mértani helye – miközben az ω körfrekvencia befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot – a **Nyquist helygörbe**⁷¹. Ennek ismerete felvilágosítást ad arról, hogy az **aszimptotikusan stabilis tag** a különféle körfrekvenciájú harmonikus jeleket, kvázistacioner állapotban, milyen amplitúdó „torzítással”, illetve milyen fázis „torzítással” engedi magán keresztül⁷². A $W(j\omega)$ helygörbe leírja, hogy a jelátvivő tag – mint a harmonikus jeleket **szűrő** dinamikus rendszer – milyen viselkedést mutat, mely frekvencia intervallumokban végez „kiemelést”, illetve milyen frekvencia intervallumokban végez „elnyomást”.

Az ábrán az s síki negatív képzetes tengelyének ($-\infty < \omega < 0$) képfüggvényét is ábrázoltuk. Ennek – mint majd később látjuk – matematikai jelentés adható. Mivel az s síki $-j\omega_1$ vektora a $j\omega_1$ vektor konjugáltja, ezért a $W(s)$ síkon $W(-j\omega_1) = \text{conj}W(j\omega_1)$. Ebből pedig az is következik, hogy a negatív imaginárius tengely képfüggvénye a pozitív imaginárius tengely képfüggvényének a valós tengelyre vett tükörképe, vagyis a **teljes** – negatív körfrekvenciákra is kiterjesztett – Nyquist helygörbe, szimmetrikus a $W(s)$ síki valós tengelyére. Fizikai rendszereket leíró frekvencia függvény – a rendszer tehetetlenségéből származó – tipikus tulajdonsága, hogy a nagyfrekvenciás jeleket „elnyomja”, ezért általában $\text{abs}W(j\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = a(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = 0$ ⁷³. A következő példák különféle áramköröket absztraháló tagok frekvencia függvényeit mutatják meg⁷⁴. Hasonló elrendezések a mechanika-, a hidraulika-, és a pneumatika szerkezeti megoldásaiból is választhatóak.

Lehetséges, hogy a dinamikus rendszer $W(s)$ átviteli függvényének **labilis** (pozitív valós részű) pólusa is van. Ilyen esetben az ugrásszerűen $u(t) = u_{\max} \cos(\omega t)$ gerjesztésre – a rendszer labilis volta miatt – a kvázistacioner üzemiállapot nem jöhet létre, a kimenője minden határon túl növekszik. A $W(s)_{s=j\omega} = W(j\omega)$ helyettesítésnek, illetve az s síki imaginárius tengelyének a $W(s)$ síkra képzésével kapható Nyquist helygörbének ekkor matematikai jelentés adható.

⁷⁰ Konformis leképezés: a $W(s)$ komplex változós függvény az s komplex **tárgysík** vektorait a $W(s)$ **képsík** vektoraiiba „viszi át”. Az s tárgysík zárt görbéi a $W(s)$ síkon is zárt görbe alakjában jelennek meg. A leképezés az s síki olyan pontjaira, amely pontokban $W(s)$ szinguláris, nem értelmezhető, ezért az ilyen pontokat a s síkon felvett görbén egy $\rho \rightarrow 0$ sugarú félkörrel (a szinguláris pont reguláris környezetében) meg kell kerülni. A $W(s) = G(s)/H(s)$ átviteli függvény szinguláris pontjai a $H(s) = 0$ karakterisztikus egyenlet p_i gyökei, a rendszer pólusai.

⁷¹ A Nyquist helygörbére tett nyíl az ω körfrekvencia növekedésének az irányát mutatja.

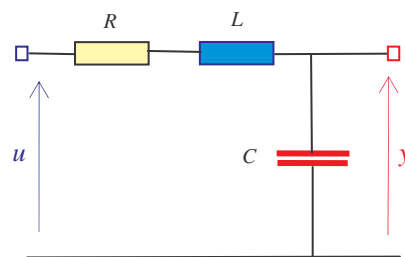
⁷² A „torzítás” itt azt jelenti, hogy az y harmonikus kimenőjel amplitúdója, és fázisa miként változik a körfrekvencia függvényében.

⁷³ A soronkövetkező példákban láthatunk olyan áramköröket, amelyeknek frekvencia függvényei azt mutatják, hogy az $\omega \rightarrow \infty$ körfrekvenciájú jeleket $a(\omega) = \text{állandó} \neq 0$ amplitúdóval engedik magukon keresztül. Ez azonban a valóságban nincs így, és azért lehetséges, mert a fizikai rendszer matematikai modellje elhanyagolásokat tartalmaz, és az ennek alapján meghatározott $W(j\omega)$ frekvencia függvény is csupán egy adott körfrekvencia intervallumban írja le a dinamikus rendszer viselkedését.

⁷⁴ Tanulságos lehet a példákban tárgyalt dinamikus rendszerek egységugrás bemenő jelre adott válaszáinak (a $v(t)$ átmeneti függvényeiknek) –, a $W(s)$ átviteli függvények pólus-zérus eloszlásainak –, és a Bode diagramoknak a kiszámítása, és ábrázolása. Ezek meghatározását az olvasóra bízuk. Segítség: $G = \text{input}('G=')$; $H = \text{input}('H=')$; $\text{step}(G, H)$; $\text{pzmap}(G, H)$; $\text{bode}(G, H)$; .

Példa

A 30. ábrán aszimptotikusan stabilis RLC áramkör kapcsolási vázlata, és átviteli függvénye⁷⁵ látható. A másodrendű rendszer $W(s)$ átviteli függvénye az áramkörök analízisében használt operátoros impedanciák alkalmazásával közvetlenül felírható.



$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^2 + g_1 s + g_2}{h_0 s^2 + h_1 s + h_2} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} =$$

$$= \frac{1}{1 + RCs + LCs^2} = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2}$$

$$T_0 = \sqrt{LC} \quad 2\xi T_0 = RC \quad \xi = \frac{RC}{2T_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$g_0 = 0 \quad g_1 = 0 \quad g_2 = 1$$

$$h_0 = LC \text{ sec}^2 \quad h_1 = RC \text{ sec} \quad h_2 = 1$$

30. ábra

RLC áramkör kapcsolási vázlata és átviteli függvénye

Az RLC passzív elemeket tartalmazó áramkör a T_ξ lineáris lengő tagnak is egy szerkezeti illusztrációja, ha az átviteli függvényében szereplő ξ csillapítási tényező a $0 < \xi < 1$ intervallumban van. Legyen ezért:

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2} = \frac{1}{1 + 0.2s + s^2} \quad (\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0.1 \quad T_0 = \sqrt{LC} = 1 \text{ sec})$$

- a.) Adjuk meg a tag $W(j\omega)$ frekvencia függvényét, és ábrázoljuk ennek Nyquist helygörbét!
- b.) A tag bemenetén zérus kezdeti feltételek mellett $u(t) = 2\sin(\omega t) = 2\sin(t)$ bemenő jelet működtetünk (a bemenő jel amplitúdója $u_{max}=2$ körfrekvenciája $\omega=1$).
- b1.) Léptékhelyesen ábrázoljuk az $y(t)$ kimenő jelet!
- b2.) Kvázistacioner állapotban adjuk meg az $y(t) = y_{max}\sin(\omega t + \varphi)$ kimenő jel ω körfrekvenciáját, $y_{max}(\omega)$ amplitúdóját, és a bemenő jelhez képesti $\varphi(\omega)$ fáziseltolási szögét!

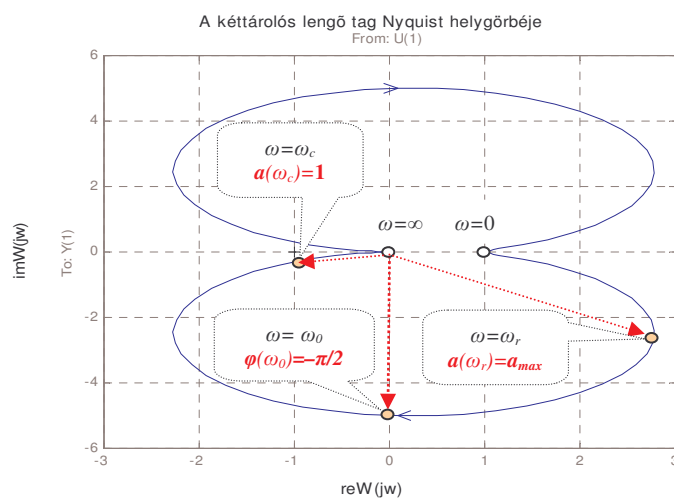
Megoldás.

- a.) A frekvencia függvény az átviteli függvényből közvetlenül felírható:

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(s)}{H(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + 2\xi T_0(j\omega) + T_0^2(j\omega)^2} = \frac{1}{1 + 0.2(j\omega) + (j\omega)^2} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j0.2\omega}$$

MATLAB támogatással számolva és ábrázolva (lásd 31.ábra):

```
G=1;H=[1 0.2 1];grid on;nyquist(G,H);
title('A kéttárolós lengő tag Nyquist helygörbéje');
xlabel('reW(jw)');ylabel('imW(jw)');
```



31. ábra

Kéttárolós lengő tag Nyquist helygörbéje ($\xi=0.1$, $T_0=1$)

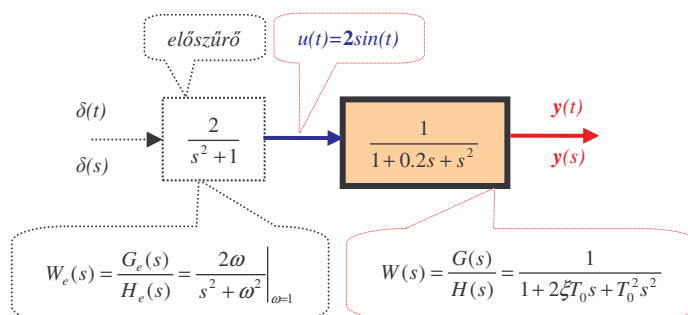
⁷⁵ Az adott áramkör a két energiatárolós tag áramköri illusztrációját reprezentálja.

A helygörből látható, hogy miközben az ω körfrekvencia befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot az $a(\omega) = |W(j\omega)|$ amplitúdónak az ω_r körfrekvenciánál a_{max} maximuma van, ω_0 -nál $\varphi(\omega) = \arctan W(j\omega)$ szöge $\varphi(\omega_0) = -\pi/2$, és ω_c -nél $a(\omega_c) = 1$ ($\omega_c = \sqrt{(1-2\xi^2)}/T_0$ a **rezonancia körfrekvencia**, és $a_{max}(\omega_r) = 1/\sqrt{1-\xi^2}$). $\omega_0 = 1/T_0$ a **csillapítatlan (természetes) saját körfrekvencia**⁷⁶, és $a(\omega_0) = 1/(2\xi)$. $\omega_c = \sqrt{2(1-2\xi^2)}/T_0$ a **vágási körfrekvencia**, és $a(\omega_c) = 1$. A kéttárolós lengő tag mindezen jellegzetes körfrekvencia értékei (ω_r , ω_0 , ω_c), illetve az ezeken a körfrekvenciákhoz tartozó $a(\omega_r)$, $a(\omega_0)$, $a(\omega_c)$ értékek az

$$a(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}$$

kifejezésből számíthatók.

b1.) A tag bemenetén lévő $u(t) = 2\sin(\omega t) = 2\sin(t)$ jelet úgy állítjuk elő, hogy egy $W_e(s) = 2\omega/(s^2 + \omega^2)$ átviteli függvényű előszűrő bemenetén $L\{\delta(t)\} = 1$ jelet működtetünk⁷⁷. A W_e átviteli függvényű előszűrő tag kimenetén keletkező jel időfüggvénye ekkor: $L^{-1}\{2\omega/(s^2 + \omega^2)\} = 2\sin(\omega t)$ ⁷⁸. Az így létrehozott rendszer hatásvázlata $\omega = 1$ figyelembevételével (lásd 32.ábra):

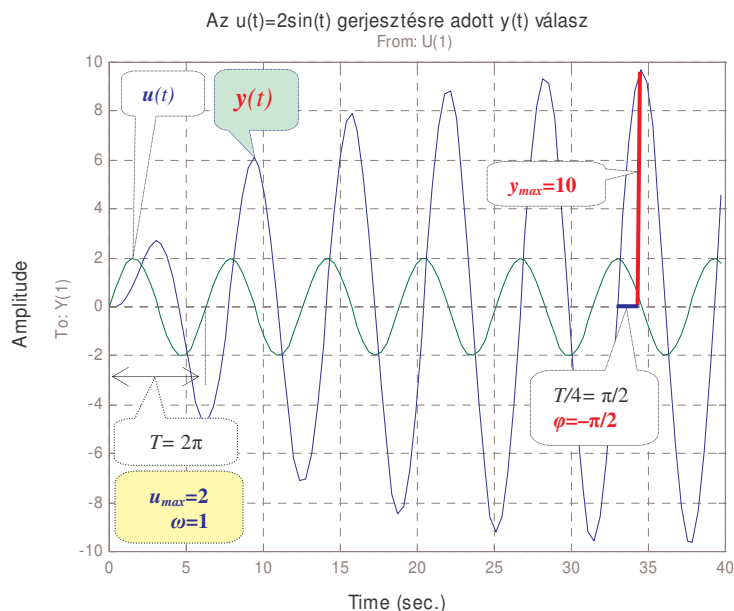


32. ábra

Az $u(t) = 2\sin(t)$ jel előállítás, és a vizsgált rendszer bemenetén történő működtetése

A rendszer $y(t)$ kimenő jelét MATLAB támogatással számítjuk és ábrázoljuk (33.ábra):

```
Ge=2; He=[1 0 1]; grid on; impulse(Ge, He); hold on;
[Gy, Hy]=series(Ge, He, G, H); impulse(Gy, Hy)
```



33. ábra

Figyeljük meg, hogy a transziensek „lecsengését” követően (elvileg a $t = \infty$ időpontban, gyakorlatilag a $t \gg T_0$ időpont eltelte után) a harmonikus $y(t)$ kimenő jel amplitúdója $y_{max} = 10$, a bemenő jelhez viszonyított fáziseltolási szöge $\varphi = -\pi/2$.

⁷⁶ A lengő tag $v(t)$ átmeneti függvényében szereplő periodikus összetevő $\omega = \sqrt{(1-\xi^2)}/T_0$ lengési körfrekvenciája a **csillapított saját körfrekvencia**. Az ω_r rezonancia frekvencia akkor létezik, ha $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$.

⁷⁷ Ez egy fiktív kísérleti elrendezés, ami a számítások egyszerű elvégzését (a tag differenciálegyenletének a megoldását) teszi lehetővé.

⁷⁸ Vegyük figyelembe, hogy a Laplace transzformáció alapján $L\{\sin(\omega t)\} = \omega/(s^2 + \omega^2)$

b2.) A bemenőjel körfrekvenciája $\omega=1$. A rendszer lineáris, ezért a kimenőjel körfrekvenciája a kvázistacioner állapotban azonos a bemenőjel körfrekvenciájával, vagyis $\omega=1$. A $W(j\omega)$ frekvencia függvény értéke az $\omega=1$ körfrekvencián

$$W(j\omega)_{\omega=1} = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 j + T_0^2 j^2} = \frac{1}{1 - 1 + 0.2j} = -5j$$

$$absW(j\omega)_{\omega=1} = 5 \quad arcW(j\omega)_{\omega=1} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -90^\circ$$

Ennek megfelelően $y_{max}=a(\omega)u_{max}=5*2=10$; $\varphi=-\pi/2$ (-90°), tehát az $u(t)=2\sin(t)$ -re adott válasz a rendszer kvázistacioner állapotában $y(t)=10\sin(t-\pi/2)$.

Általános esetben $W(j\omega)$ m fokszerű számlálóval, és n fokszerű nevezővel rendelkező algebrai tört, ezért a képfüggvény meghatározása nem egyszerű. Kivételt képez ez alól a **lineáris törtfüggvény**⁷⁹, ekkor ugyanis

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s + g_1}{h_0 s + h_1} \Rightarrow$$

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{g_0 j\omega + g_1}{h_0 j\omega + h_1} = \frac{(g_0 j\omega + g_1)(-h_0 j\omega + h_1)}{(h_0 j\omega + h_1)(-h_0 j\omega + h_1)} = \frac{j\omega(g_0 h_1 - g_1 h_0) + g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} =$$

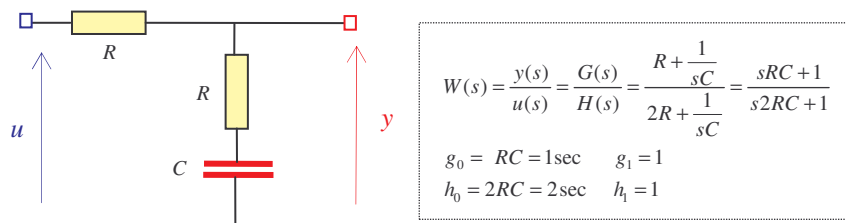
$$= \frac{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} + j\omega \frac{(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} = realW(j\omega) + jimagW(j\omega)$$

$$W(j\omega) = \sqrt{\frac{g_0^2 \omega^2 + g_1^2}{h_0^2 \omega^2 + h_1^2}} e^{j(\arctg \frac{g_0 \omega}{g_1} - \arctg \frac{h_0 \omega}{h_1})} = absW(j\omega) e^{jarcW(j\omega)} = a(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

A lineáris törtfüggvény által létesített leképezés „**körtartó**”, ami azt jelenti, hogy az s síkon lévő kör képfüggvénye a $W(s)$ síkon, szintén kör. Mivel az s sík $s=j\omega$ ($-\infty < \omega < \infty$) képzetes tengelye egy végtelen sugarú körként értelmezhető, a lineáris törtfüggvény által létesített $W(j\omega)$ képfüggvénynek is körnek kell lennie.

Példa

Adott a 34. ábrán RC áramkör kapcsolási vázlata, és átviteli függvénye⁸⁰ látható. Léptékhelyesen ábrázoljuk az áramkört absztraháló tag $W(j\omega)$ frekvencia függvényét. Határozzuk meg a harmonikus bemenőjelnek azt a körfrekvenciáját, amely mellett a kimenő jel fáziseltolásának *minimuma* van!



34. ábra

Fáziskésleltető RC áramkör kapcsolási vázlata és átviteli függvénye

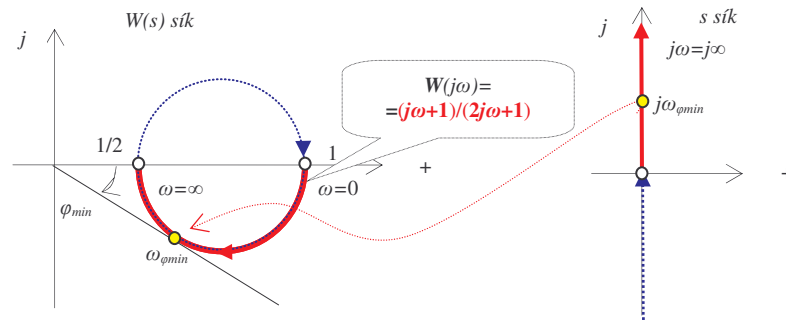
Megoldás

$W(j\omega) = W(s)_{s=j\omega}$ lineáris törtfüggvény, ezért az s sík $j\omega$ képzetes tengelyének képfüggvénye kör (35.ábra).

$$W(j\omega) = \frac{g_0 j\omega + g_1}{h_0 j\omega + h_1} = \frac{j\omega + 1}{2j\omega + 1} \Rightarrow W(j\omega)_{\omega=0} = \frac{g_1}{h_1} = 1 \quad W(j\omega)_{\omega=\infty} = \frac{g_0}{h_0} = \frac{RC}{2RC} = \frac{1}{2}$$

⁷⁹ Lineáris törtfüggvény esetén a tag elsőrendű, differenciálegyenletének általános alakja: $h_0 dy(t)/dt + h_1 y(t) = g_0 du(t)/dt + g_1 u(t)$.

⁸⁰ Ez az áramkör közelítő **PI szabályozási algoritmus** realizálására is felhasználható. **Fáziskésleltető** áramkör.



35. ábra

Az s sík képzetes tengelyének képfüggvénye a $W(s)$ síkon

A *Nyquist* helygörbéből leolvasható, hogy miközben az RC áramkör egységnyi amplitúdójú harmonikus bemenő feszültségének körfrekvenciája befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot, a kimenő jel amplitúdója az egységről $1/2$ értékre csökken⁸¹, és eközben a fáziseltolási szög zérusról, φ_{min} értéken át, ismételt zérusra változik. A $W(j\omega)$ valós-, és képzetes része, illetve fázisszöge:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{g_0 j\omega + g_1}{h_0 j\omega + h_1} = \frac{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} + j\omega \frac{(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} = \\
 &= \frac{1 + 2(RC\omega)^2}{1 + 4(RC\omega)^2} - j \frac{RC\omega}{1 + 4(RC\omega)^2} = \text{real}W(j\omega) + j\text{imag}W(j\omega) \\
 \varphi(\omega) &= \arg W(j\omega) = \arctg \frac{\text{imag}[W(j\omega)]}{\text{real}[W(j\omega)]} = \arctg \frac{\frac{\omega(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2}}{\frac{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2}} = \arctg \frac{\omega(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1} = \\
 &= \arctg \frac{\omega(RC - 2RC)}{2(RC)^2 \omega^2 + 1} = \arctg \frac{-RC\omega}{2(RC\omega)^2 + 1} = \arctg \frac{-\omega}{2\omega^2 + 1} = -\arctg \frac{\omega}{2\omega^2 + 1}
 \end{aligned}$$

A $\varphi(\omega)$ függvénynek ott van szélsőértéke, ahol $d\varphi(\omega)/d\omega = 0$, vagyis

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \arctg \frac{-\omega}{2\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-\omega}{2\omega^2 + 1}\right)^2} \cdot \frac{-2\omega^2 - 1 - 4\omega(-\omega)}{(2\omega^2 + 1)^2} = 0$$

Ebből kapjuk: $2\omega^2 - 1 = 0$, és innen $\omega_{\varphi_{min}} = 1/\sqrt{2}$. Ennél a körfrekvenciánál a fáziseltolási szögnek minimuma van. A φ_{min} értéke:

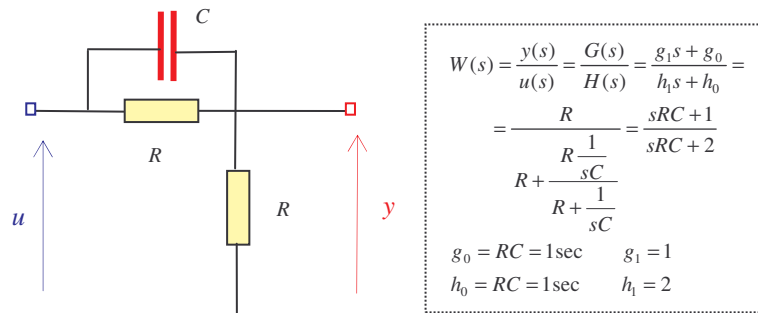
$$\varphi_{min}(\omega_{\varphi_{min}}) = \arctg \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \arctg \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -0.3398 \Rightarrow -19.4712^\circ$$

Példa

Adott az alábbi RC áramkör kapcsolási vázlata, és átviteli függvénye⁸². Léptékhelyesen ábrázoljuk az áramkört absztraháló tag $W(j\omega)$ frekvencia függvényét. Határozzuk meg a harmonikus bemenőjelnek azt a körfrekvenciáját, amely mellett a kimenő jel fáziseltolásának maximuma van.

⁸¹ Azzal a korábban tett megjegyzésünkkel szemben, amely szerint $\omega \rightarrow \infty$ mellett $\text{abs}W(j\omega) \rightarrow 0$, most $\omega = \infty$ mellett $\text{abs}W(j\omega) = 1/2$ értékre adódik, vagyis a dinamikus rendszer az egységnyi amplitúdójú, $\omega = \infty$ körfrekvenciájú jelet is $a(\omega)_{\omega=\infty} = 1/2$ amplitúdóval engedné magán keresztül. Az ellentmondás abban van, hogy az áramkör induktivitását elhanyagoltuk. Vagyis az adott frekvencia függvény a valóság egyfajta közelítése.

⁸² Ez az áramkört **PD** szabályozási algoritmus realizálására is használható.

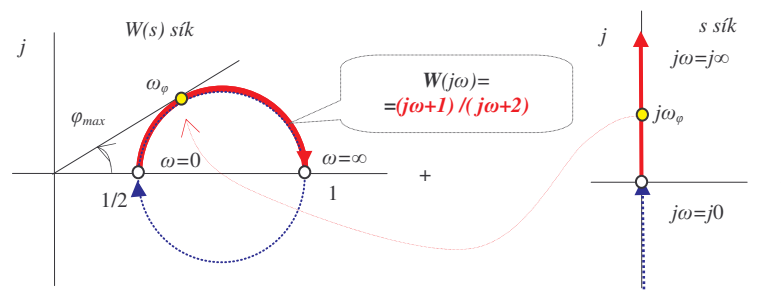


36. ábra

Fázissiettető RC áramkör kapcsolási vázlata és átviteli függvénye

$W(j\omega) = W(s)_{s=j\omega}$ lineáris törtfüggvény, ezért az s sík képzetes tengelyének képfüggvénye kör.

$$W(j\omega) = \frac{g_0 j\omega + g_1}{h_0 j\omega + h_1} = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2} \Rightarrow W(j\omega)_{j\omega=0} = \frac{g_1}{h_1} = \frac{1}{2} \quad W(j\omega)_{j\omega=\infty} = \frac{g_0}{h_0} = \frac{RC}{RC} = 1$$



37. ábra

Az s sík képzetes tengelyének képfüggvénye a W síkon

A Nyquist helygörbéből leolvasható, hogy miközben az RC áramkör egységnyi amplitúdójú harmonikus bemenő feszültségének körfrekvenciája befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot, a kimenő jel amplitúdója az $1/2$ értékről az egységre növekszik, és eközben a fáziseltolási szög zérusról, φ_{max} értéken át, ismételt zérusra változik. A $W(j\omega)$ valós-, és képzetes része, illetve fázisszöge:

$$W(j\omega) = \frac{g_0 j\omega + g_1}{h_0 j\omega + h_1} = \frac{(g_0 j\omega + g_1)(-h_0 j\omega + h_1)}{(h_0 j\omega + h_1)(-h_0 j\omega + h_1)} = \frac{j\omega(g_0 h_1 - g_1 h_0) + g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2}$$

$$= \frac{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} + j\omega \frac{(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{(h_0 \omega)^2 + h_1^2} = \text{real}W(j\omega) + j\text{imag}W(j\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arc}W(j\omega) = \text{arctg} \frac{\text{imag}[W(j\omega)]}{\text{real}[W(j\omega)]} = \text{arctg} \frac{\omega(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1} = \text{arctg} \frac{\omega(g_0 h_1 - g_1 h_0)}{g_0 h_0 \omega^2 + g_1 h_1}$$

$$= \text{arctg} \frac{\omega(2RC - RC)}{(RC)^2 \omega^2 + 2} = \text{arctg} \frac{RC\omega}{(RC\omega)^2 + 2} = \text{arctg} \frac{\omega}{\omega^2 + 2}$$

A $\varphi(\omega)$ függvénynek ott van szélsőértéke, ahol $d\varphi(\omega)/d\omega=0$, vagyis

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \text{arctg} \frac{\omega}{\omega^2 + 2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega^2 + 2}\right)^2} \frac{\omega^2 + 2 - 2\omega(\omega)}{(\omega^2 + 2)^2} = 0$$

Ebből kapjuk: $\omega^2 - 2 = 0$, és innen $\omega_{\varphi_{max}} = \sqrt{2}$. Ennél a körfrekvenciánál a fáziseltolási szögnek maximuma van. A φ_{max} értéke:

$$\varphi_{max}(\omega_{\varphi_{max}}) = \text{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2+2} = \text{arctg} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0.3398 \Rightarrow 19.4712^\circ$$

Példa

Integráló tag átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{g_0 s + g_1}{h_0 s + h_1} \bigg|_{g_0=0, h_1=0} = \frac{g_1}{h_0 s} = \frac{1}{s T_i} \quad (T_i = 1)$$

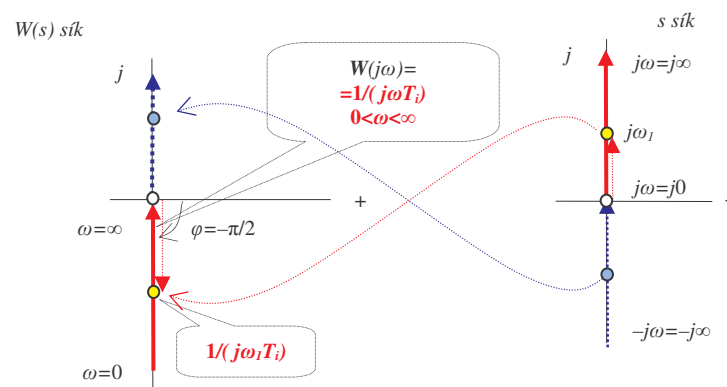
- a.) Adjuk meg a tag *Nyquist* helygörbét.
 b.) Az integráló tag bemenetére $u(t) = \sin(\omega t) = \sin(2t)$ jelet kapcsolunk ($\omega=2$). Adjuk meg az $y(t)$ kimenőjel időfüggvényét.

Megoldás

a.) Ez esetben is lineáris törtfüggvény képezi le az s sík képzetes tengelyét a W síkra, de most – miután az átviteli függvénynek a komplex sík origójában pólusa van – **nem aszimptotikusan stabilis rendszerről van szó**. A $W(j\omega) = W(s)_{s=j\omega}$ megfeleltetés alapján:

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_i} \quad T_i = \frac{h_0}{g_1}$$

A *Nyquist* helygörbe:



38. ábra

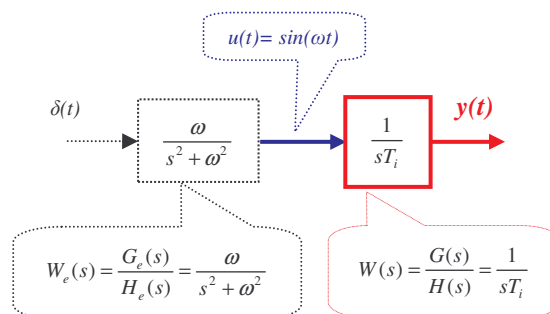
Az s sík képzetes tengelyének képfüggvénye a $W(s)$ síkon

Ez a leképzés az s sík **pozitív** képzetes tengelyét a $W(s)$ sík **negatív** képzetes tengelyébe „viszi át”. $W(j\omega)$ fázisa a körfrekvenciától független, és $\varphi(\omega) = -\pi/2$ (-90°), $W(j\omega)$ abszolút értéke pedig a körfrekvenciától $a(\omega) = 1/(\omega T_i) = 1/\omega$ szerint hiperbolikusan függ. Az integráló tag tehát alul áteresztő szűrő tulajdonságával rendelkezik, a nagyfrekvenciás jeleket erősen elnyomja.

b.) Az integráló tag $W(j\omega)$ *Nyquist* helygörbéje alapján most nem vonható le az a következtetés, hogy az egységnyi amplitúdójú harmonikus bemenőjel bármekkora ω körfrekvenciájánál a harmonikus kimenőjel amplitúdója $a(\omega)u_{\max} = a(\omega) = 1/(\omega T_i)$ és fázisszöge $\varphi(\omega) = -\pi/2$. Ennek oka az, hogy az integráló tag az $u(t) = \sin(\omega t)$ bemenő jelre adott $y(t)$ válasza:

$$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t u(t) dt = \frac{1}{T_i} \int_0^t \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\omega T_i} \cos(\omega t) \bigg|_0^t = -\frac{1}{\omega T_i} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega T_i} = \frac{1}{\omega T_i} [1 - \cos(\omega t)]$$

Az $y(t)$ kimenő jelet az alábbi hatásvázlatnak megfelelően, **MATLAB** támogatással számítjuk:

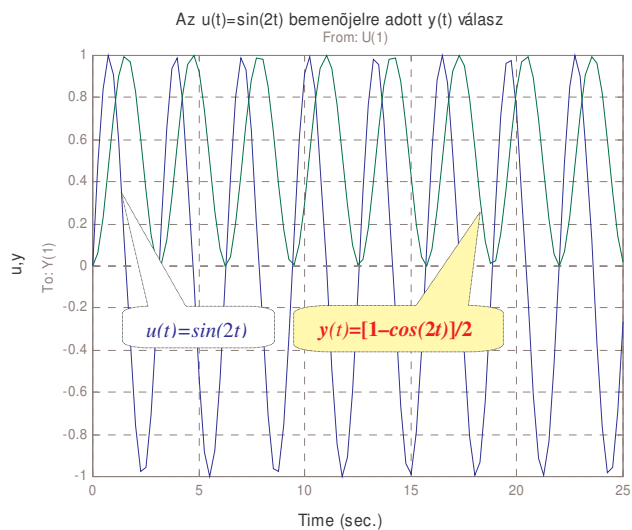


39. ábra

Az $u(t) = \sin(\omega t)$ jel előállítás, és a vizsgált rendszer bemenetén történő működtetése

```
Ge=2; He=[1 0 4]; grid on; impulse(Ge, He); hold on;
```

```
G=1;H=[1 0];
[Gy,Hy]=series(Ge,He,G,H);impulse(Gy,Hy);
title('Az u(t)=sin(2t) bemenő jelre adott y(t) válasz');
ylabel('u,y');
```



40. ábra

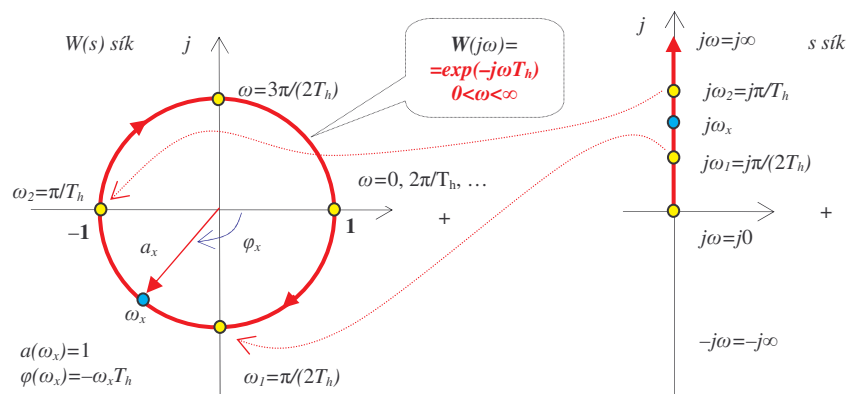
Az integráló tag $u(t)=\sin(2\omega t)$ gerjesztésre adott $y(t)$ válasza

Holtidós tag Nyquist helygörbéje

Különös fontossággal bír a holtidós tag tulajdonságait leíró $W(j\omega)$ frekvencia függvény. A $W(j\omega)$ most a transzcendens $W(s)$ -ből $s=j\omega$ helyettesítéssel származtatható:

$$W(s) = e^{-sT_h} \Rightarrow W(j\omega) = e^{-j\omega T_h} \Rightarrow a(\omega) = 1 \quad \varphi(\omega) = -\omega T_h$$

A $W(j\omega)=\exp(-j\omega T_h)$ frekvencia függvény egy egységsugarú kör egyenlete, a Nyquist helygörbe a 41. ábrán látható.



41. ábra

A $W(s)=\exp(-sT_h)$ átviteli függvényű holtidós tag Nyquist helygörbéje

A Nyquist helygörbéből kiolvashatóan az egységnyi átviteli tényezővel rendelkező holtidós tag minden körfrekvenciájú jelet egységnyi amplitúdóval enged magán keresztül: $a(\omega)=1$ (mindent áteresztő szűrő⁸³). A kimenő jel és a bemenő jel közötti fáziseltolási szög ezzel szemben az ω körfrekvencia $\varphi(\omega)=-\omega T_h$ szerinti lineáris függvénye. Miközben a körfrekvencia befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot, a $W(j\omega)$ helygörbe végtelen sokszor körbejárja a $W(s)$ sík origóját.

A $W(s)=\exp(-sT_h)$ átviteli függvény elsőfokú Pade⁸⁴ –, és k fokszámú Strejc közelítésének lehetséges alakjai:

⁸³ A holtidós tag $W(j\omega)=\exp(-j\omega T_h)$ frekvencia függvénye elméleti határeset, fizikai rendszerekben a holtidós késleltetés energiatárolásból származó késleltetéssel együtt fordul elő.

⁸⁴ A Pade közelítésnek léteznek magasabb fokszámmal rendelkező kifejezései is.

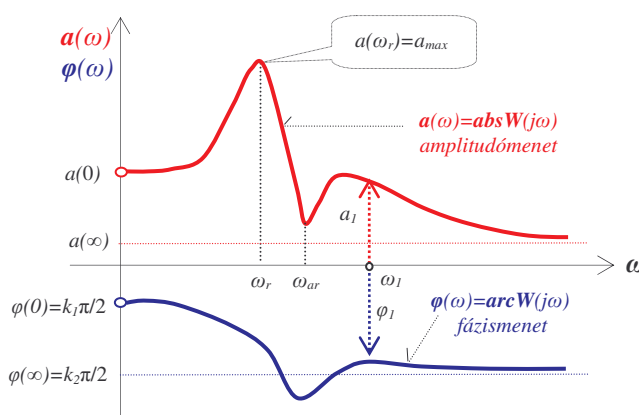
$$W(s) = e^{-sT_h} \equiv \frac{2-sT_h}{2+sT_h} = \frac{1-s\frac{T_h}{2}}{1+s\frac{T_h}{2}} \quad W(s) = e^{-sT_h} \equiv \frac{1}{(1+s\frac{T_h}{k})^k}$$

A $W(j\omega)$ frekvencia függvény ábrázolásának további lehetőségei az $a(\omega)=absW(j\omega)$, $\varphi(\omega)=arcW(j\omega)$, illetve a $re(\omega)=realW(j\omega)$, $im(\omega)=imagW(j\omega)$ függvényeknek *Descartes* koordináta rendszerben történő megadása. Ezek egyenértékűek a *Nyquist* diagram ismeretével.

Labilis rendszerekre is értelmezhető az átviteli függvényhez rendelhető $W(j\omega)$ frekvencia függvény, de ilyen esetben – miután a rendszer az $u(t)=u_{max}\sin(\omega t)$ harmonikus gerjesztésre minden határon túl növekvő $y(t)$ kimenő jellel válaszolna – a $W(j\omega)$ frekvencia függvénynek matematikai jelentés adható⁸⁵.

A Bode diagram

A *Nyquist* helygörbe polárdiagramban adja meg az $a(\omega)$ hosszúságú-, és $\varphi(\omega)$ fázisszögű vektorok végpontjainak mértani helyét, miközben az ω körfrekvencia befutja a $-\infty < \omega < \infty$ intervallumot. Ebből fizikai jelentése a $0 < \omega < \infty$ intervallumnak van, az ebben értelmezett $a(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ értékek azt mutatják meg, hogy az önbeálló lineáris jelátvivő tag – mint a harmonikus bemenő jeleket szűrő dinamikus rendszer – milyen frekvencia-átviteli tulajdonsággal rendelkezik. A szűrő karakterisztika⁸⁶ igen változatos lehet, *Descartes* koordináta rendszerben megjelenő jellegzetes alakját a 42. ábra mutatja.



42. ábra

Egy jellegzetes $a(\omega)$, és $\varphi(\omega)$ karakterisztika *Descartes* koordináta rendszerben

A stabilis lineáris rendszerek frekvencia függvényének $a(\omega)$ amplitúdó karakterisztikái adott ω_r körfrekvenciáknál rezonancia (kiemelés)–, vagy ω_{ar} körfrekvenciánál antirezonancia (elnyomás) jelleget mutathatnak, de általánosan jellemző tulajdonságuk, hogy a nagyfrekvenciás jeleket elnyomják: $a(\omega)_{\omega=\infty}=a(\infty)=0$. Mindez a fizikai rendszerek tehetetlenségi tulajdonságából származtatható. A $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztika jellegzetessége, hogy az $\omega=0$, és az $\omega=\infty$ körfrekvenciákon felvett értéke a $\pm\pi/2$ radián egészszámszorosok lehet⁸⁷. Mindenesetre az *amplitúdó–körfrekvencia* karakterisztika a körfrekvenciának magas fokszámú hatványfüggvénye, a *fázis–körfrekvencia* karakterisztika pedig trigonometrikus kifejezéseket tartalmaz, ezért a frekvencia függvény ábrázolása – a lineáris törtfüggvény esetét kivéve – nehézkes. Ezen segít a *Bode* diagram, amelyben logaritmikus léptéket vesszünk fel az amplitúdó-, és a körfrekvencia tengelyeken egyaránt. Ez az ábrázolás lehetőséget teremt arra, hogy a magas fokszámú hatványfüggvényeket egyenes szakaszokból álló törtvonalakkal (aszimptotákkal) közelítsük.

Az átviteli függvény időállandós normálalakjából kapjuk a frekvencia függvény időállandós normálalakját:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^i} \frac{\prod_{l=1}^m (1 + j\omega\tau_l) \prod_{l=1}^{m_2} [1 + 2\mu_l\tau_{ol}j\omega + \tau_{ol}^2(j\omega)^2]}{\prod_{l=1}^m (1 + j\omega T_l) \prod_{l=1}^{n_2} [1 + 2\xi_l T_{ol}j\omega + T_{ol}^2(j\omega)^2]} e^{-\omega T_h}$$

⁸⁵ A labilis tagok $W(j\omega)$ frekvencia függvényének matematikai jelentése az általános *Nyquist* stabilitás kritérium alkalmazásánál kerül felhasználásra.

⁸⁶ Az **aluláteresztő** szűrő átengedi magán keresztül az alacsony frekvenciájú jeleket, de a nagyfrekvenciájúakat erősen csillapítja. A **felüláteresztő** szűrő átengedi a magas frekvenciájú jeleket és az alacsony frekvenciájúakat erősen csillapítja. A **sávszűrő** csak egy adott frekvenciasávban lévő jeleket enged magán keresztül, szemben a **sávzáró** szűrővel, amely egy adott frekvencia sávban lévő jeleket nem engedi magán keresztül.

⁸⁷ Ez csak akkor lehetséges, ha a lineáris rendszer holtidő nélküli.

Ebből az $a(\omega)=absW(j\omega)$ amplitúdó–körfrekvencia függvény (**amplitúdómenet**), és $\varphi(\omega)=arcW(j\omega)$ fázis–körfrekvencia függvény (**fázismenet**) közvetlenül felírható:

$$a(\omega) = absW(j\omega) = \frac{k}{(\omega)^i} \frac{\prod_{l=1}^m \sqrt{1 + (\omega\tau_l)^2} \prod_{l=1}^{m_2} \sqrt{(1 - \tau_{ol}^2 \omega^2)^2 + (2\mu_l \tau_{ol} \omega)^2}}{\prod_{l=1}^n \sqrt{1 + (\omega T_l)^2} \prod_{l=1}^{n_2} \sqrt{(1 - T_{ol}^2 \omega^2)^2 + (2\xi_l T_{ol} \omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arcW(j\omega) = \sum_{l=1}^m arctg(\omega\tau_l) + \sum_{l=1}^{m_2} arctg \frac{2\mu_l \tau_{ol} \omega}{1 - \tau_{ol}^2 \omega^2} -$$

$$- i \frac{\pi}{2} - \sum_{l=1}^n arctg(\omega T_l) - \sum_{l=1}^{n_2} arctg \frac{2\xi_l T_{ol} \omega}{1 - T_{ol}^2 \omega^2} - \omega T_h$$

Az amplitúdó menetet a híradástechnikából átvett decibelben skálázva, az $a(\omega)_{dB}=20\log a(\omega)$ jelentősen egyszerűsödik, mivel a logaritmus képzés a *szorzást összeadásra*–, a *hányados képzést kivonásra*, egyszerűsíti:

$$a(\omega)_{dB} = 20\log a(\omega) = 20[\log k + \sum_{l=1}^m \log \sqrt{1 + (\omega\tau_l)^2} + \sum_{l=1}^{m_2} \log \sqrt{(1 - \tau_{ol}^2 \omega^2)^2 + (2\mu_l \tau_{ol} \omega)^2} -$$

$$- i \log \omega - \sum_{l=1}^n \log \sqrt{1 + (\omega T_l)^2} - \sum_{l=1}^{n_2} \log \sqrt{(1 - T_{ol}^2 \omega^2)^2 + (2\xi_l T_{ol} \omega)^2}]$$

Ha a decibelben mért amplitúdót olyan koordináta rendszerben ábrázoljuk, amelyben az ω körfrekvenciára is logaritmikus léptéket használunk⁸⁸, akkor az $a(\omega)_{dB}$ grafikonjának négyzetgyökös tényezőit tartalmazó komponensei egyenes szakaszokkal közelíthetők, hiszen

$$20\log \sqrt{1 + (\omega T)^2} = \begin{cases} 20\log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} & \omega T \ll 1 \\ 20\log \sqrt{2} = 3 \text{ dB} & \omega T = 1 \\ 20\log(\omega T) & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

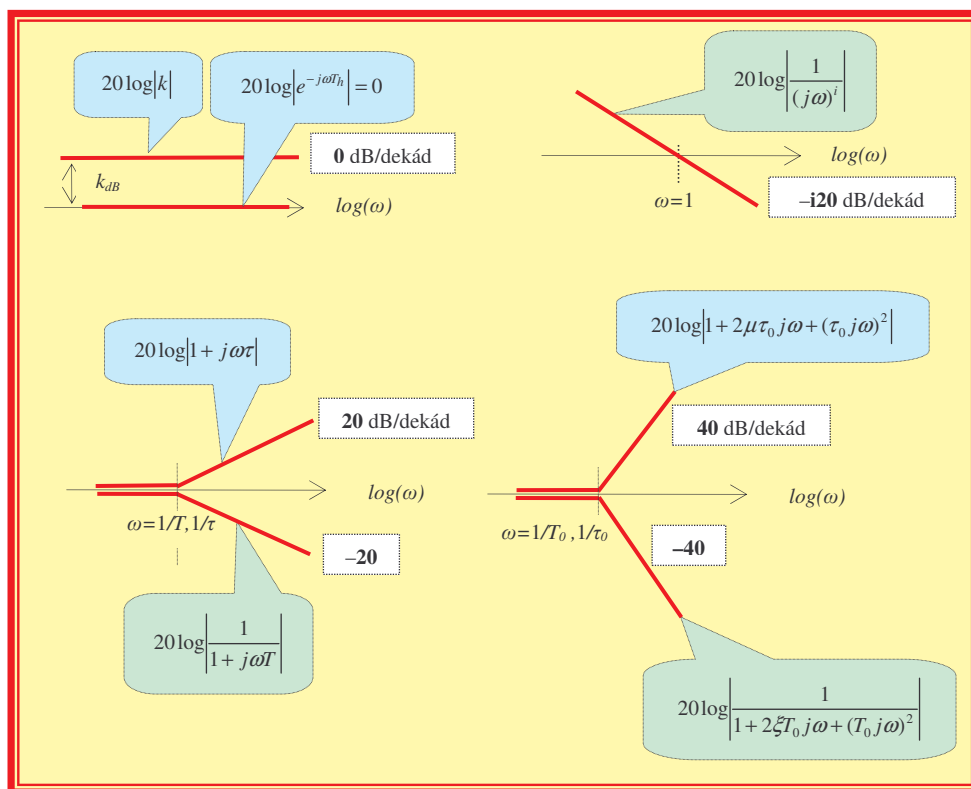
$$20\log \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} = \begin{cases} 20\log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} & \omega T \ll 1 \\ 20\log(2\xi) \text{ dB} & \omega T = 1 \\ 40\log(\omega T) & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

Az $a(\omega)_{dB}$ amplitúdómenet különféle komponensének aszimptotikus közelítései ennek megfelelően **0** dB/dekád, **±20** dB/dekád, **±40** dB/dekád, **±i20** dB/dekád meredekségű egyenesek, és ezek *összegzésével* áll elő a tényleges amplitúdó menet aszimptotikus közelítése. A közelítő egyenesek, és a tényleges érték között a legnagyobb eltérés az $\omega=1/T$ körfrekvenciájú töréspontokban van (± 3 dB, illetve $\pm 20\log(2\xi)$ dB). A $\varphi(\omega)$ fázismenet komponensei vagy állandó értékek ($\pm\pi/2$ -nek egészszámu többszörösei), vagy pedig $arctg$ ⁸⁹ típusú trigonometrikus függvények.

Az amplitúdó menet komponenseinek aszimptotikus közelítéseit a 43. ábrán foglaltuk össze. Ezeken a vízszintes koordinátára a $\log(\omega)$ értéket vesszük (vagy logaritmikus léptékben skálázunk), a függőleges koordinátán pedig az amplitúdót decibelben mérjük: $a_{dB}=20\log a$.

⁸⁸ Ezen a skálán **1dekád** az a távolság, amelyen az ω körfrekvencia a **10-szeresére** növekszik, vagy a tizedére csökken.

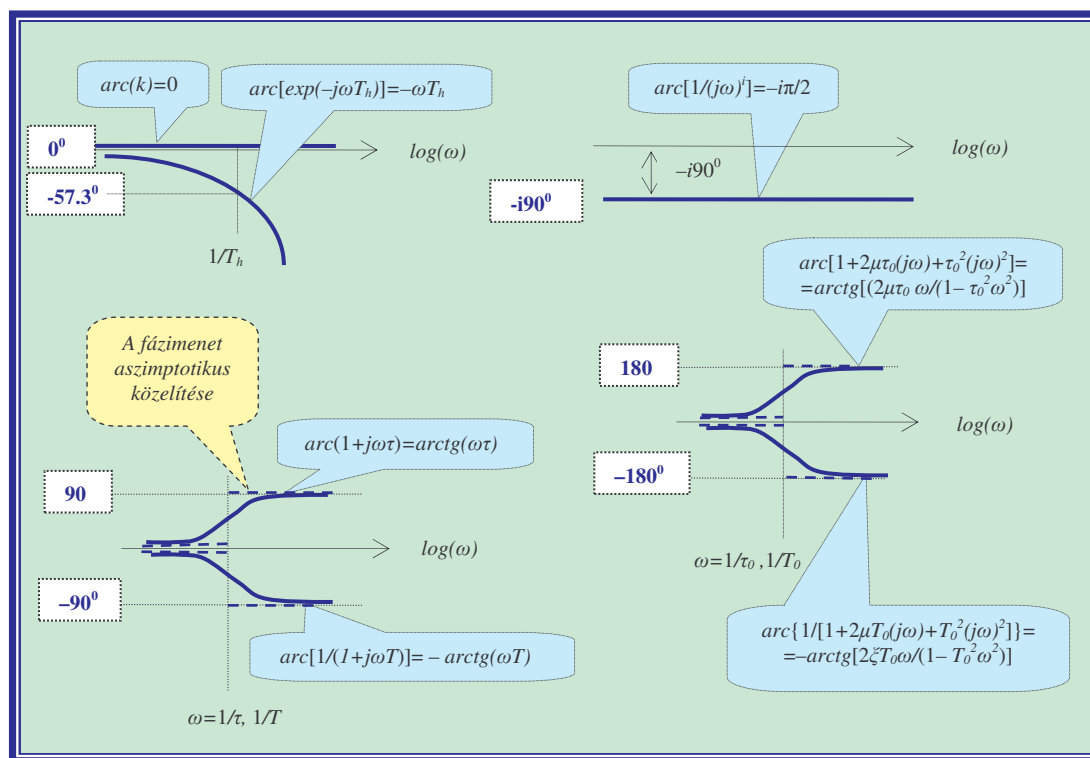
⁸⁹ Az $\varphi=arctg\omega$ függvény főértéke a $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ között változik, miközben az ω független változó a $-\infty < \omega < \infty$ intervallumot futja be. Ha a frekvencia függvény $\exp(-j\omega T_h)$ holtidős tényezőt is tartalmaz, akkor a fázismenetnek $-\omega T_h$ komponense is van.



43. ábra

A frekvencia függvény amplitúdómenet komponenseinek aszimptotikus közelítései

A fázismenet komponensei láthatóan a $\pm\pi/2$ radián egészszámszerű többszöröseit, az $\arctg$ trigonometrikus függvény komponenseit, illetve a holtidőből származó $-\omega T_h$ tényezőket tartalmazzák. A Bode diagram fázismenete a φ szöget szögfokban méri, és értékét a $\log(\omega)$ függvényében ábrázolja. A fázisdiagram komponenseit a 44. ábra tartalmazza.



44. ábra

A fázismenet komponensei, és ezek aszimptotikus közelítései

Megjegyzés.

A $W(s)$ átviteli függvény holtidős tényezője a fázismentre lényeges befolyást gyakorol, mivel $\text{arc}[\exp(-j\omega T_h)] = -\omega T_h$. Ez a tényező az $\omega = 1/T_h$ körfrekvencián -1 radián (-57.3°) fázisszög változással befolyásolná a holtidő mentes rendszer fáziseltolását. Ennek akkor van meghatározó jelentősége, ha $W(s) = W_0(s)$ a szabályozás felnyitott körének eredő átviteli függvénye, és ennek ω_c vágási körfrekvenciája az $1/T_h$ érték környezetére esik. Ilyenkor a holtidő jelenléte a zárt szabályozási rendszer stabilizálási problémáihoz vezethet.

Példa

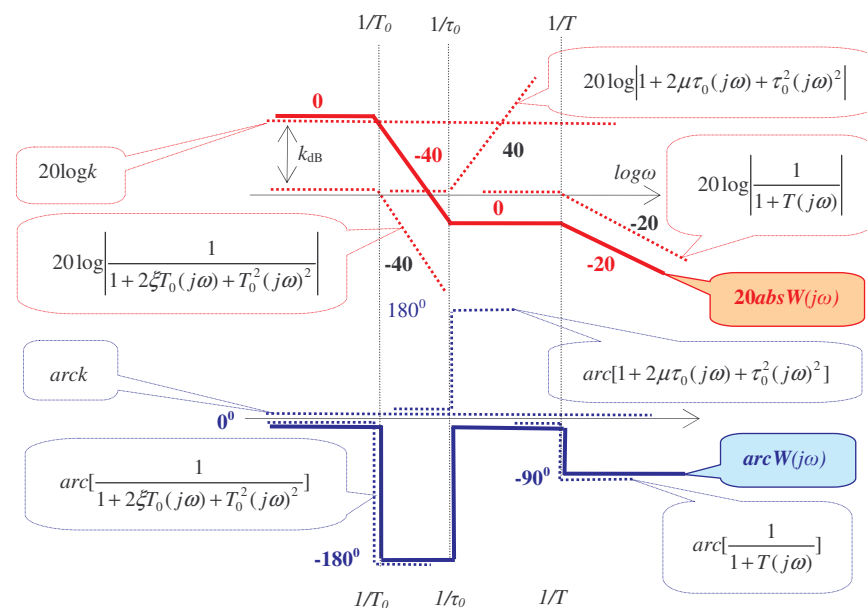
Önbeálló harmadrendű rendszer, időállandós normálalakban definiált átviteli függvénye:

$$W(s) = k \frac{1 + 2\mu\tau_0 s + \tau_0^2 s^2}{(1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2)(1 + sT)} = 10 \frac{1 + 0.2s + s^2}{(1 + 0.4s + 4s^2)(1 + 0.1s)}$$

$$k = 10 \quad \mu = 0.1 \quad \tau_0 = 1 \quad \xi = 0.1 \quad T_0 = 2 \quad T = 0.1$$

Ábrázoljuk a tag Bode diagramjainak aszimptotikus közelítéseit, valamint az amplitúdómenet-, és a fázisment pontos diagramjait.

Jelen feladatban egy olyan dinamikus rendszert absztraháló tagról van szó, melynek átviteli függvénye negatív valós részű zéruspárral ($-\mu/\tau_0 \pm j\sqrt{(1-\mu^2)/\tau_0}$), valamint negatív valós részű póluspárral ($-\xi/T_0 \pm j\sqrt{(1-\xi^2)/T_0}$), és egy negatív pólussal ($-1/T$) rendelkezik. A rendszert leíró tag így önbeálló. Az aszimptotikus Bode diagramok (45. ábra):

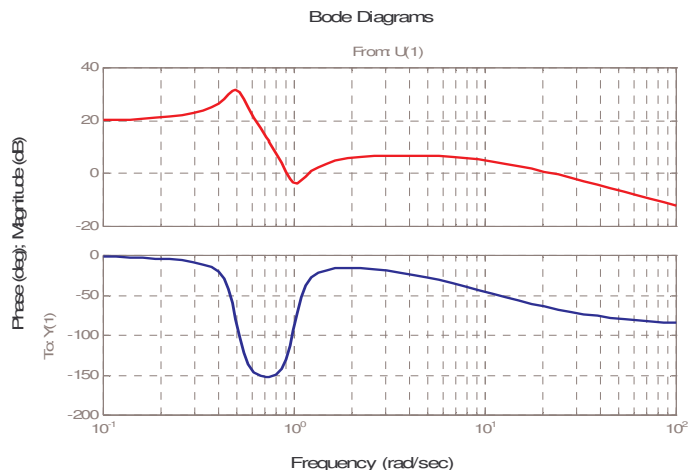


45. ábra

Az aszimptotikus Bode diagramok

A pontos Bode diagramokat MATLAB támogatással számítjuk és ábrázoljuk (lásd 41. ábra):

```
k=input('k='); mü=input('mü='); tau0=input('tau0=');
ksi=input('ksi='); T0=input('T0='); T=input('T=');
G=[tau0^2 2*mü*tau0 1]; H=conv([T0^2 2*ksi*T0 1],[T 1]);
grid on; bode(G,H)
```



46. ábra

Példa

PIPD szabályozási algoritmust reprezentál az alábbi átviteli függvény:

$$W_c(s) = k \frac{1+sT_i}{sT_i} \frac{1+sT_d}{1+sT} \quad k=2.5 \quad T_i=5 \quad T_d=1 \quad T=0.1$$

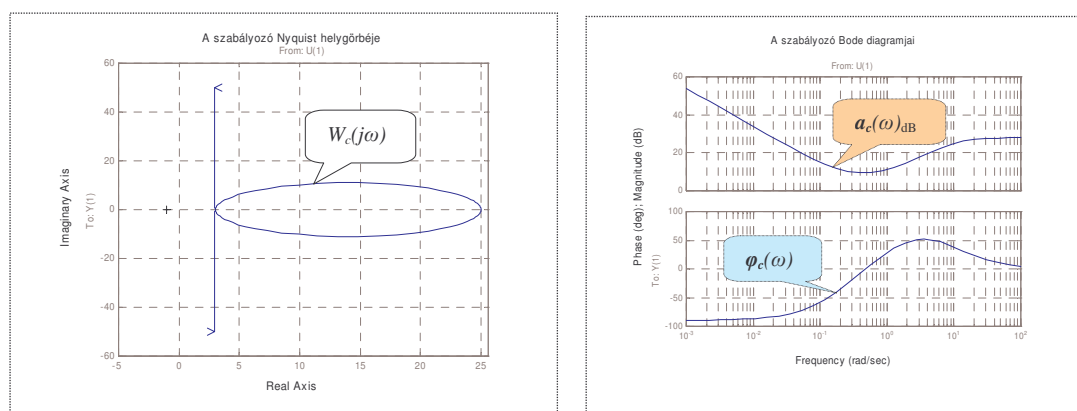
Léptékhelyesen ábrázoljuk a szabályozó *Nyquist* helygörbjét, és *Bode* diagramjait.

A szabályozó frekvencia függvénye:

$$W_c(j\omega) = W_c(s)|_{s=j\omega} = k \frac{(1+j\omega T_i)(1+j\omega T_d)}{j\omega T_i(1+j\omega T)} = 2.5 \frac{(1+5j\omega)(1+j\omega)}{5j\omega(1+0.1j\omega)}$$

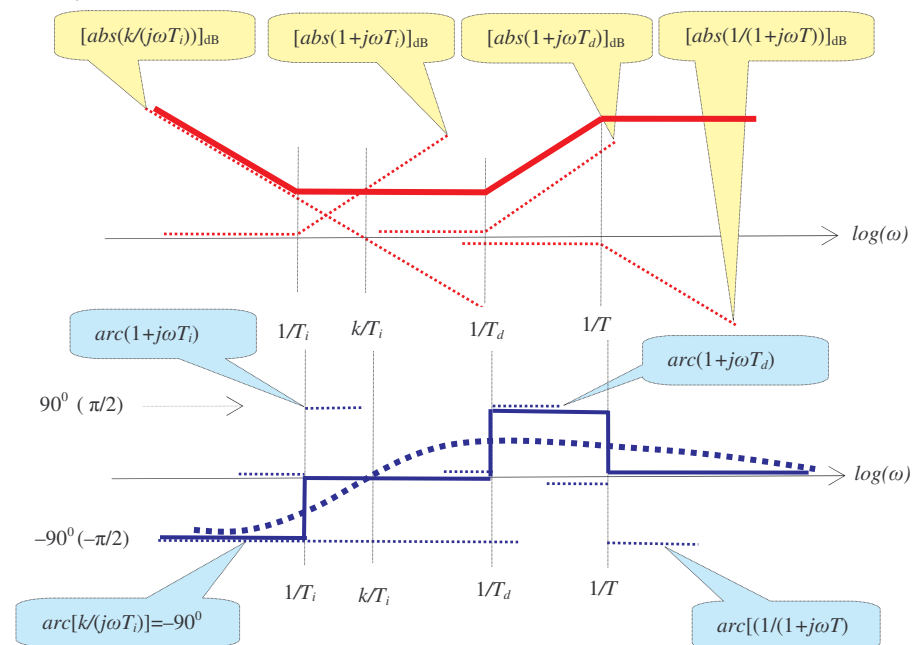
A *Nyquist* helygörbjét, és a *Bode* diagramokat **MATLAB** támogatással számítjuk és ábrázoljuk (lásd 42.ábra):

```
K=input('k=');Ti=input('Ti=');Td=input('Td=');T=input('T=');
%k=2.5,Ti=5,Td=1,T=0.1
Gc=k*conv([Ti 0],[Td 0]);Hc=conv([Ti 0],[T 1]);grid on;nyquist(Gc,Hc);
title('A szabályozó Nyquist helygörbje');
bode(Gc,Hc);
title('A szabályozó Bode diagramjai');
```



47. ábra

Az eredmények alapján a szabályozó frekvencia átviteli tulajdonságai kiválóan megítélhetők, különösképpen a *Bode* diagramok ismeretében. Ez utóbbiakat a **MATLAB** nagy pontossággal számítja, de ha ez nem áll rendelkezésünkre, az *aszimptotikus* amplitúdómenet-, illetve a fázismenet egyszerűen és gyorsan felvázolható. Az adott esetben – a komponensenkénti ábrázolás alapján – az aszimptotikus amplitúdó-, és fázismenet (lásd 43.ábra):



48. ábra

A **PIPD** szabályozó aszimptotikus *Bode* diagramjai

Ha a frekvencia függvény az $\exp(-j\omega T_h)$ holtidős tényezőt is tartalmazza, akkor ez az eredeti amplitúdó menetet nem befolyásolja, a fázismenetet viszont egy további $\varphi(\omega)=-\omega T_h$ additív tényezővel módosítja. Ez az ω -nak ugyan lineáris függvénye, de mivel a *Bode* diagramon a fázisszöget $\log \omega$ függvényében ábrázoljuk, ezért a lineáris függvényt megjelenítő egyenes a logaritmikus lépték miatt „eltorzul”.

Példa

Egy energiatárolós holtidős folyamat átviteli függvénye:

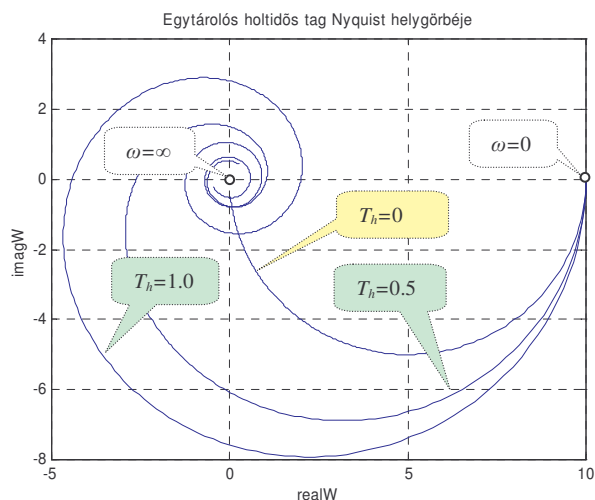
$$W_p(s) = \frac{k}{1+sT} e^{-sT_h} \quad k=10 \quad T=1$$

A holtidő $T_h : 0, T_h=T/2=0.5$, és $T_h=T=1$ értékeire lépték helyesen ábrázoljuk a folyamat $W(j\omega)$ frekvencia függvényének *Nyquist* helygörbét. $T_h=T=1$ esetre adjuk meg az $a(\omega)$, a $\varphi(\omega)$, a $\text{real}W(j\omega)$, és az $\text{imag}W(j\omega)$ karakterisztikákat, valamint a *Bode* diagramokat. Adjuk meg a *Bode* diagramok aszimptotikus közelítéseit. A frekvencia függvény, valamint ennek abszolút értéke, szöge, valós-, és képzetes része:

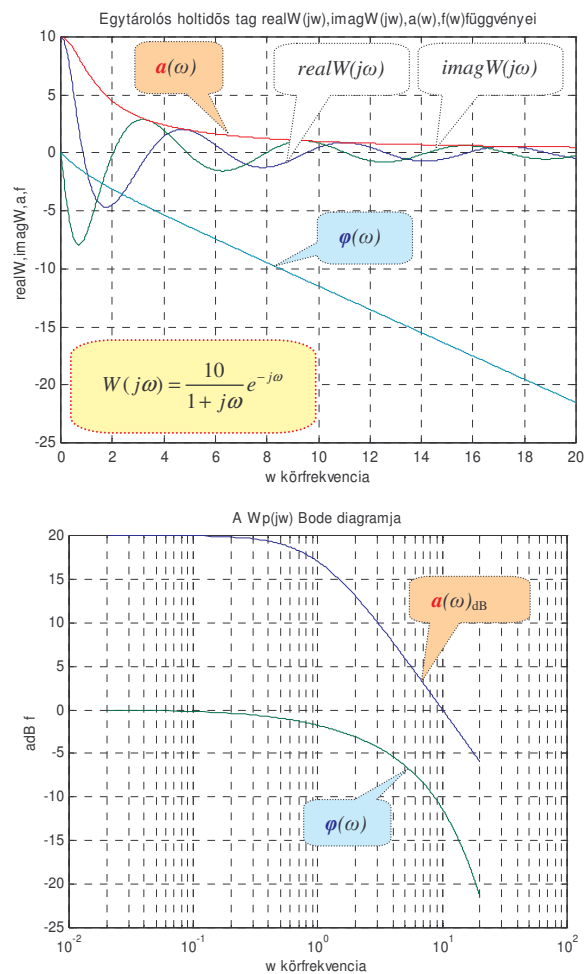
$$\begin{aligned} W_p(j\omega) &= \frac{k}{1+j\omega T} e^{-j\omega T_h} = \frac{k}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} e^{-j\arctg(\omega T)} e^{-j\omega T_h} = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j\arctg(10\omega) - j\omega T_h} \\ a(\omega) &= \left| \frac{k}{1+j\omega T} e^{-j\omega T_h} \right| = \left| \frac{k}{1+j\omega T} \right| = \left| \frac{10}{1+j\omega} \right| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) &= \arg W_p(j\omega) = \arg \frac{k}{1+j\omega T} + \arg e^{-j\omega T_h} = -\arctg(\omega T) - \omega T_h = -\arctg(\omega) - \omega T_h \\ W_p(j\omega) &= \frac{k(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} [\cos(-\omega T_h) + j\sin(-\omega T_h)] = k \left[\frac{1}{1+(\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} \right] [\cos(-\omega T_h) + j\sin(-\omega T_h)] = \\ &= k \frac{\cos(\omega T_h) - \omega T \sin(\omega T_h)}{1+(\omega T)^2} + j k \frac{-\omega T \cos \omega T_h - \sin(\omega T_h)}{1+(\omega T)^2} \\ \text{real}W_p(j\omega) &= k \frac{\cos(\omega T_h) - \omega T \sin(\omega T_h)}{1+(\omega T)^2} = 10 \frac{\cos(\omega T_h) - \omega \sin(\omega T_h)}{1+(\omega)^2} \\ \text{imag}W_p(j\omega) &= -k \frac{\omega T \cos \omega T_h + \sin(\omega T_h)}{1+(\omega T)^2} = -10 \frac{\omega \cos \omega T_h + \sin(\omega T_h)}{1+(\omega)^2} \end{aligned}$$

A számításokat, és az ábrázolást (lásd 44a,b. ábrák) támogató **MATLAB** program:

```
k=10;T=1;Th=input('Th=');
w=linspace(0,20,1000);
realWp=k*(cos(w*Th)-w*T.*sin(w*Th))./(1+(w*T).^2);
imagWp=-k*(w*T*cos(w*T)+sin(w*T))./(1+(w*T).^2);
a=sqrt(realWp.^2+imagWp.^2);f=-atan(w*T)-w*Th;
plot(realWp,imagWp);grid on;
plot(w,realWp,w,imagWp,w,a,w,f);
dB=20*log10(a);
[Gh,Hh]=pade(Th,5);GT=k;HT=[T 1];Gp=k*Gh;Hp=conv(HT,Hh);
semilogx(w,dB,w,f);
```

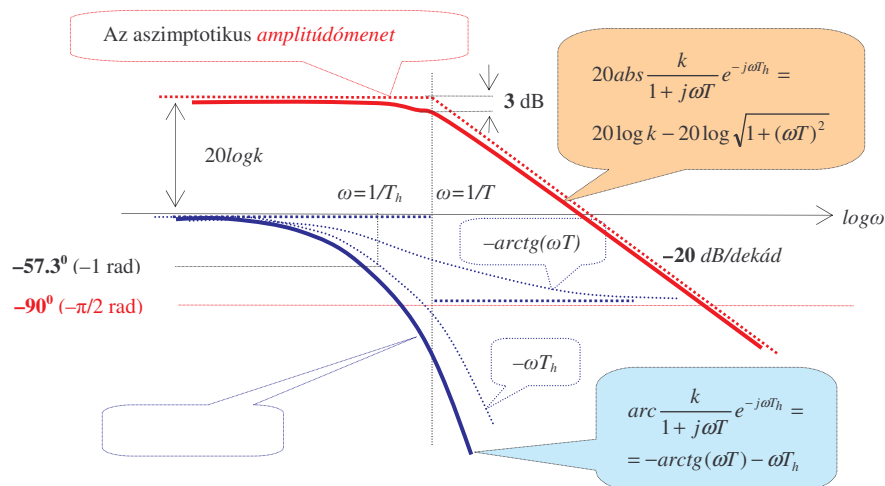


49a. ábra



49b. ábra

Az aszimptotikus *Bode* diagram amplitúdó menetének töréspontja az $\omega = 1/T = 1$ körfrekvencia értéknél van, és az amplitúdó menetet a holtidő nem befolyásolja. A $\varphi(\omega)$ fázismenet jelentősen függ a holtidő értékétől. Ábrán szemléltetve (lásd 50. ábra):



50. ábra

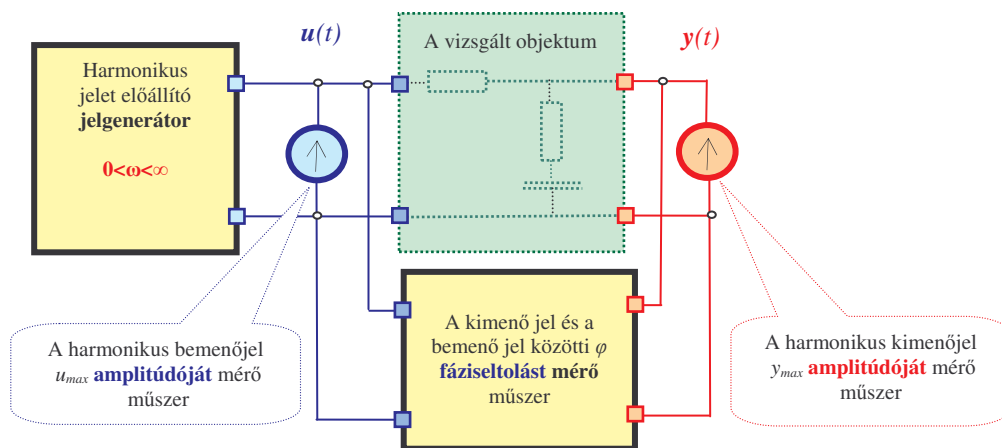
Az egytárolós holtidős tag frekvencia függvényének *Bode* diagramjai

A *Bode* diagramok közelítő, aszimptotikus felvázolását az a kényszer szülte, hogy az átviteli függvény magas fokszáma esetén, a $W(j\omega)$ frekvencia függvény pontos meghatározása jelentős mértékben számításgigényes. A mai – számítástechnika által nyújtott – lehetőségek mellett már nem szükséges a közelítések alapján dolgoznunk, így például a szabályozás rendszertechnikai méretezésekor is a pontos frekvencia függvénnyel számolhatunk.

Ennek ellenére a Bode diagramok aszimptotikus ábrázolásmódja a szemléltetés eszközeként továbbra is kiválóan használható.

A frekvencia függvény kísérleti meghatározása

Az önbeálló tagok $W(j\omega)$ frekvencia függvénye mérések sorozatával is meghatározható. A mérési eljárás lefolytatásához szükség van egy olyan, a harmonikus bemenő jelet előállító jelforrásra, amely széles frekvencia intervallumban képes állandó amplitúdójú harmonikus jel szolgáltatására. A kísérlet elvi elrendezését⁹⁰ a 51. ábra mutatja.



51. ábra

Mérési elrendezés a frekvencia függvény kísérleti meghatározására

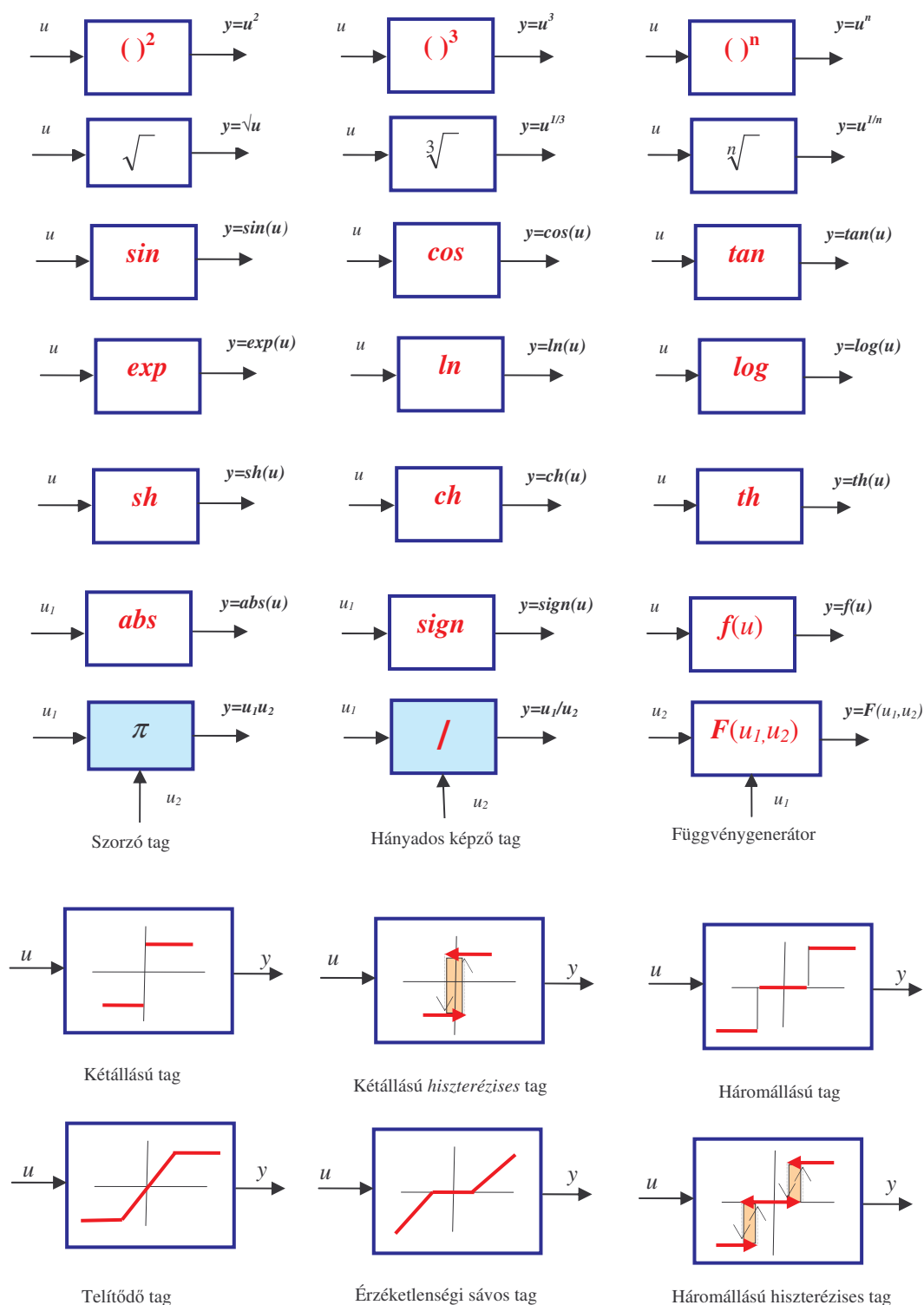
A jelgenerátoron be kell állítani egy adott f_1 [Hz] frekvencia értéket ($\omega_1 = 2\pi f_1$ [rad/sec]), valamint az objektumra kapcsolt jel u_{max1} amplitúdóját. Ezután meg kell várni a kvázistacioner állapot kialakulását, és ezt követően kell leolvasni a kimenő jel y_{max1} amplitúdóját, és a bemenő jelhez viszonyított $\varphi_1(\omega_1)$ fáziseltolási szögét. Az $y_{max1}/u_{max1} = a_1(\omega_1)$ érték lesz az adott ω_1 körfrekvenciához tartozó $absW(j\omega_1)$, a $\varphi_1(\omega_1)$ pedig az $arcW(j\omega_1)$. A mérést a körfrekvencia különféle értékeknél ismételt el kell végezni, a körfrekvencia olyan intervallumban, amely a vizsgált objektum szempontjából a meghatározó. A fáziseltolás mérésének igen egyszerű módszere (villamos feszültségek esetében), egy kétsugaras oszcilloszkópon a $u(t)$ és $y(t)$ jelek időfüggvényeinek, vagy a jelek által képzett $y(u)$ Lissajous görbének az ábrázolása. Léteznek olyan – igencsak költségigényes – céleszközök, és mérési eljárások is, amelyek a Nyquist helygörbét, vagy az ennek megfelelő Bode diagramokat egyetlen „gombnyomásra” képernyőn, nyomtatott ábrán, vagy táblázatos formában produkálják (spektrum-analizátorok).

Függelék

F1. Nemlineáris alaptagok

A valóságos dinamikus rendszerek igen gyakran nemlineáris matematikai modellel írhatók le, ezért ezek hatásvázlatán a lineáris alaptagokon túlmenően nemlineáris alaptagokat is szerepeltetni kell. A nemlineáris alaptagok *nemlineáris algebrai függvénykapcsolatokat*, illetve *nemlineáris matematikai műveleteket* szimbolizálnak a kimenő-, és bemenő jelek között. Ezek általában a matematikai analízisből ismert hatvány-, trigonometrikus-, exponenciális-, stb. függvényeket, illetve a *szorzást*, és a *hányados képzést* jelenítik meg.

⁹⁰ Ez a mérési elrendezés arra az esetre vonatkozik, amikor a vizsgált objektum bemenő-, és kimenő jelei villamos egyenfeszültségek.



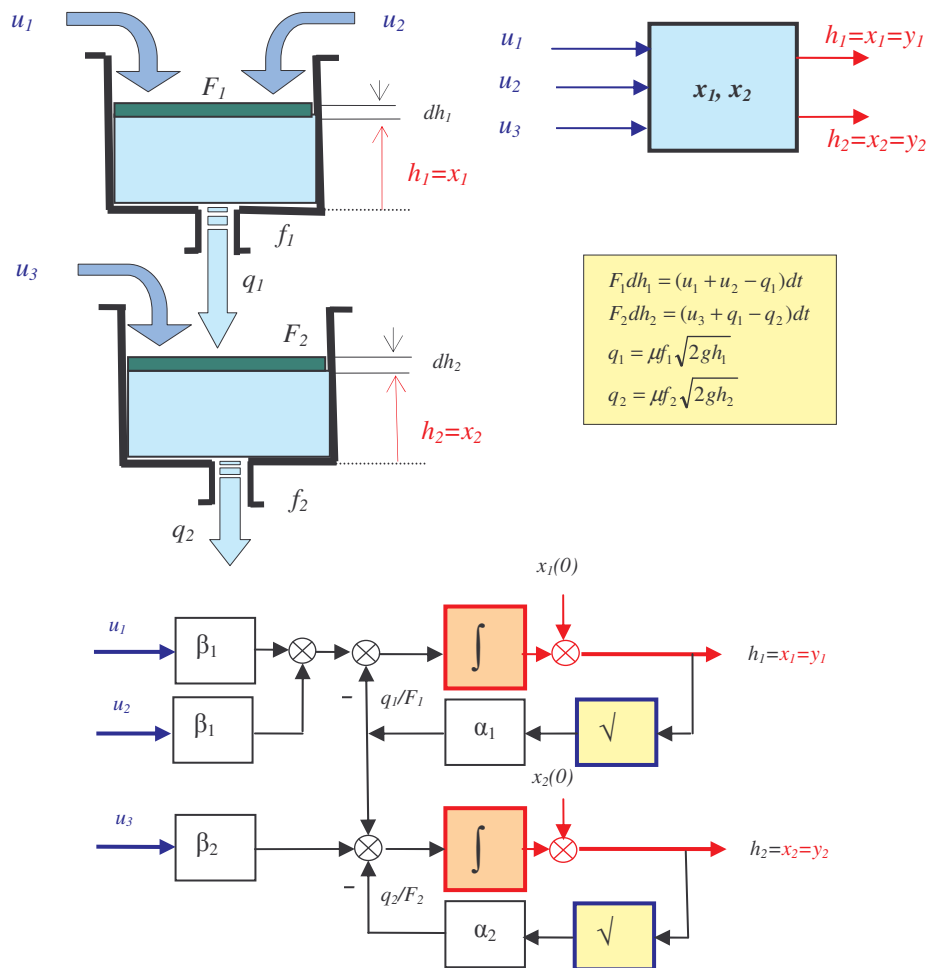
F1. ábra
Nemlineáris alaptagok egy csoportja

A nemlineáris alaptagok választéka további függvénykapcsolatok felvételével tetszőlegesen bővíthető. Ezeket a függvénykapcsolatokat, a tagot absztraháló négyyszögbe írt képlet-, illetve ábra fejezi ki. A képlet jelentése az, hogy a bemenő jelen milyen matematikai művelet kell elvégezni ahhoz, hogy a kimenő jelet előállítsuk. Sok esetben a képletszerű megadás helyett egy ábrával jellemezzük a bemenőjel–kimenőjel kapcsolatot, amely ábra általában a tag statikus jelleggörbéjét – az $y=f(u)$ függvényt – mutatja meg.

A dinamikus rendszerek matematikai modelljét, illetve e modell hatásvázlattal történő leírásában az alaptagok felhasználásának lehetőségeit, példákon mutatjuk be.

Tartályokból álló folyamat

Két, F_1 , F_2 (m^2) felületű, szabad kifolyású hengeres tartályból álló folyamat tartályait az u_1 , u_2 és u_3 (m^3/sec) hozamok töltik. A tartályokból kiáramló q_1 és q_2 hozamok a h_1 és h_2 (m) színhelyzetektől – Bernoulli törvénye szerint – a $q_1 = \mu f_1 \sqrt{2gh_1}$, $q_2 = \mu f_2 \sqrt{2gh_2}$, szerint függnek, ahol f_1 , f_2 az áramlási keresztmetszet (m^2), μ a kifolyási tényező, g a nehézségi gyorsulás (m/sec^2). A szerkezeti elrendezés, az anyagegyensúlyi egyenletek és az alaptagokból felépített hatásvázlat:



F2. ábra

Tartályokból álló dinamikus rendszer, a rendszer alaptagokból felépített hatásvázlata.

A rendszernek három bemenő jele (az u_1 , u_2 , és az u_3 hozamok) és két kimenő jele (a h_1 , és a h_2 színhelyzetek) van. Ha a $h_1 = x_1 = y_1$, és a $h_2 = x_2 = y_2$ színhelyzeteket állapotváltozóknak, és egyben kimenő jeleknek definiáljuk, akkor az anyagegyensúlyi egyenletek alapján a rendszer állapotegyenletei $\alpha = \mu f \sqrt{2g}/F$, $\beta = 1/F$ jelölésekkel:

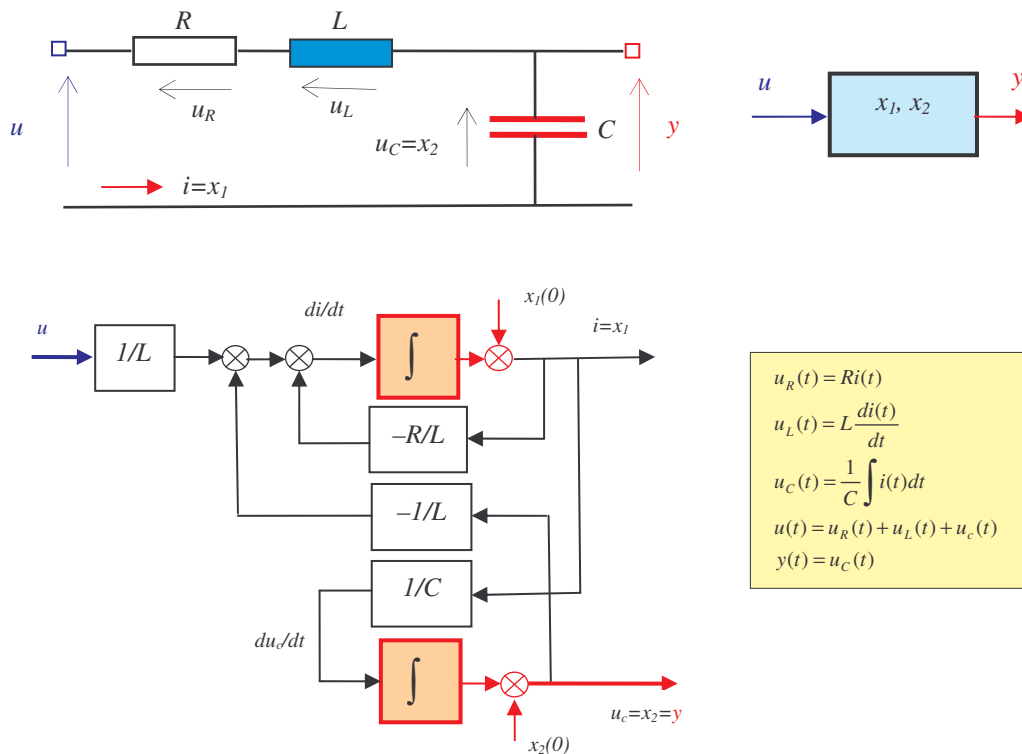
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t), u_1(t), u_2(t)] = -\alpha_1 \sqrt{x_1(t)} + \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t), x_2(t), u_3(t)] = \alpha_1 \sqrt{x_1(t)} - \alpha_2 \sqrt{x_2(t)} + \beta_2 u_3(t)$$

$$y_1(t) = g_1[x_1(t)] = x_1(t)$$

$$y_2(t) = g_2[x_2(t)] = x_2(t)$$

Jellegzetes tulajdonságok: Másodrendű (két állapotváltozó, két integráló tag)–, nemlineáris (gyökvonó tagok)–, három bemenő jelű (u_1 , u_2 , u_3 hozamok)–, két kimenő jelű (y_1 , y_2 színhelyzetek) *önbeálló* rendszer. A fizikai működésből következik, hogy állandó u_{10} , u_{20} , u_{30} hozamok mellett az y_1 , y_2 addig növekszik, amíg az $u_{10} + u_{20} = \mu f_1 \sqrt{2gy_{10}}$, illetve az $u_{30} + \mu f_1 \sqrt{2gy_{10}} = \mu f_2 \sqrt{2gy_{20}}$ anyagegyensúlyi helyzetek létre nem jönnek.

RLC elemekből felépülő áramkör

F3. ábra

RLC áramkör dinamikus rendszere, és lineáris alaptagokból felépített hatásvázlata

Ha az áramkör bemenetére az $u(t)$ feszültséget (gerjesztő jelet) kapcsoljuk, akkor ennek hatására egy $i(t)$ áram indul. Ez az áram az R ellenálláson Ri –, az L induktivitáson $L di/dt$ –, a C kapacitáson pedig $(1/C) \int i dt$ feszültségeséseket kelt. *Kirchhoff* huroktörvénye szerint a feszültség egyensúlyt kifejező egyenlet:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Ha az $i(t)$ áramot és az $u_C(t)$ feszültséget $x_1=i$, $x_2=u_C$ jelöléssel a rendszer állapotváltozóinak definiáljuk, és kimenő jelnek a kapacitáson keletkező feszültséget tekintjük ($y=u_C$), akkor a rendszer leírására az alábbi állapotegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{R}{L} x_1(t) - \frac{1}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{1}{C} x_1(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

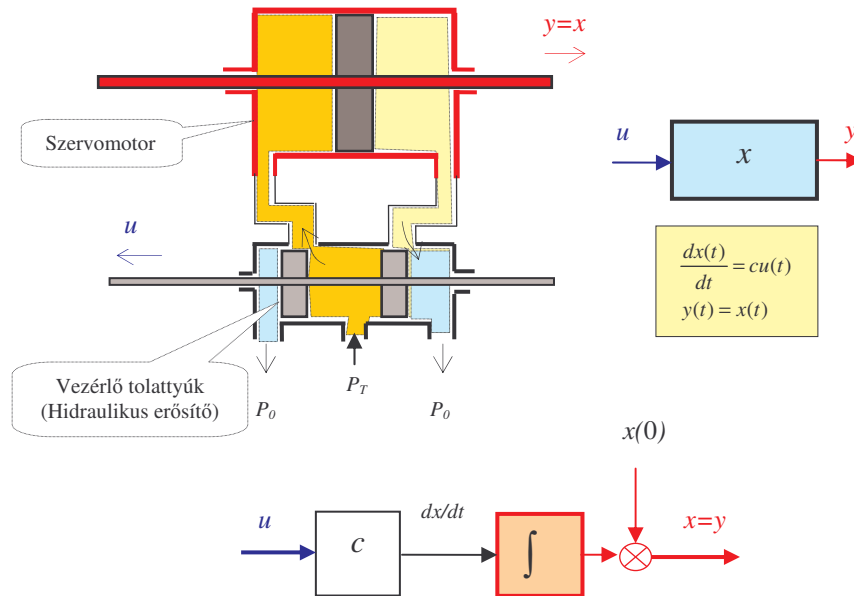
Az általános jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), x_2(t), u(t)] = -\frac{R}{L} x_1(t) - \frac{1}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2[x_1(t), x_2(t), u(t)] = \frac{1}{C} x_1(t) \\ y(t) &= g_1[x_1(t), x_2(t), u(t)] = x_2(t) \end{aligned}$$

Jellegzetes tulajdonságok: Másodrendű (két állapotváltozó, két integráló tag) –, lineáris (arányos, integráló és összegző tagok) –, egy bemenő jelű (u feszültség) –, egy kimenő jelű (y feszültség), *önbeálló* rendszer. A bemenetre kapcsolt u_0 feszültség – a tranziensek lefolyását követően – a kimenő jelet $y_0=u_0$ értékre állítja be.

Hidraulikus erősítő és szervomotor

A hidraulikus erősítő és szervomotor a folyamatirányításokban, olyan esetben kerül alkalmazásra, ahol nagy erők szükségesek a beavatkozó szervek működtetésére. A vezérlő tolattyúk u_0 elmozdulása a hidraulikus tápegység P_T olajnyomását a szervomotor dugattyújának egyik-, vagy másik oldalára vezeti, aminek hatására a dugattyú az u elmozdulással arányos állandó $dx/dt=cu$ sebességgel mozog.

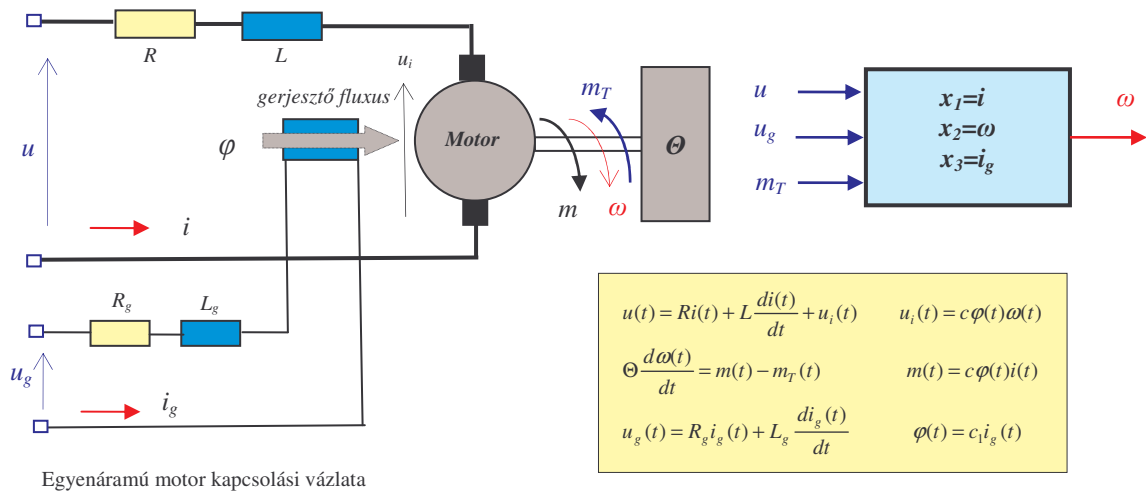


F4. ábra
Hidraulikus szervomotor állapotegyenlete és hatásvázlata

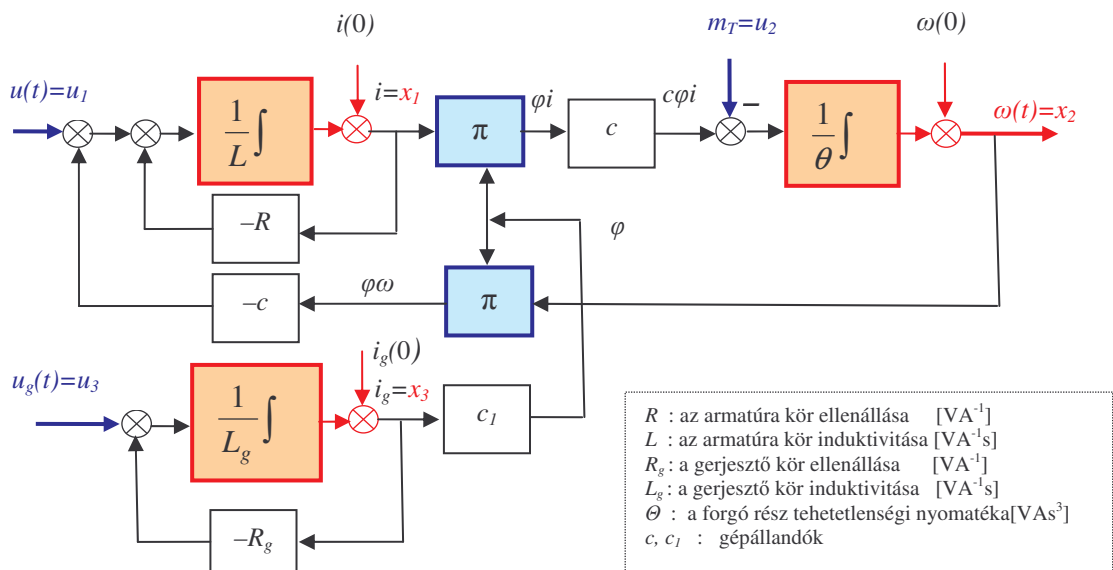
A fizikai működésből-, vagy a hatásvázlatból láthatóan, a rendszer *integráló* tulajdonságú, aminek jelentése most az, hogy az y kimenőjel az állandó u_0 hatására időben lineárisan növekszik. Ez a növekedés mindaddig tart, amíg a bemenőjel zérussá nem válik, vagy pedig addig, amíg a szervomotor „fel nem ütközik”. Jellegzetes tulajdonságok: elsőrendű (egy állapotváltozó, egy integráló tag)–, lineáris (arányos, integráló és összegző tagokat tartalmazó hatásvázlat, melynek érvényessége addig tart, amíg a szervomotor „fel nem ütközik”)–, egy bemenő (u elmozdulás)– egy kimenő jelű (y elmozdulás) rendszer. *Nem önbeálló*, mert – a működési tartományában – az állandó u_0 bemenő jel időben lineárisan növekvő $y(t)$ kimenőjelet hoz létre.

Elektromechanikai rendszer

A külső gerjesztésű egyenáramú motort a villamos hajtásokban, szervorendszerekben – egyszerű szabályozhatóságuk, a terhelő nyomatéknak a fordulatszámra kifejtett nem jelentős hatása, stb. miatt – széleskörűen alkalmazzák. Különösen előnyös tulajdonsága ennek a villamos gépnek, hogy állandó gerjesztő fluxus mellett a fordulatszám a kapocsfeszültségnek a lineáris függvénye. A külső gerjesztésű egyenáramú motor kapcsolási vázlata, a működést leíró egyenletei, és az alaptagokból felépített hatásvázlata



Egyenáramú motor kapcsolási vázlata



F5. ábra

Egyenáramú motor állapotegyenletei, és hatásvázlata

Az armatúra körre, és a gerjesztő körre érvényes *Kirchhoff* hurokegyenlet, illetve a forgórész mozgásegyenlete alapján írható fel a rendszer állapotegyenlete. Ha a terheletlen ($m_T=0$) gép armatúrájára u kapcsolófeszültséget, a gerjesztő körre pedig u_g gerjesztő feszültséget kapcsolunk, akkor ezek elindítják az i armatúra áram-, és az i_g gerjesztő áram növekedését. Az i_g állítja elő a gép $\varphi=c_i i_g$ fluxusát, ami közelítőleg a gerjesztő árammal arányos. Az i áram és a φ fluxus $m=c\varphi i$ villamos nyomatékot létesít, amely a forgórészt a mozgásegyenletnek megfelelően mozgásba hozza, így a szögsebesség növekedni kezd. Az ω szögsebesség mindaddig növekszik, amíg az m nyomaték a forgórész gyorsítja. A szögsebesség növekedése $u_i=c\varphi\omega$ indukált feszültséget („ellenelektromotoros erő”) hoz létre az armatúra kapcsain, ami ellentétes irányú az u kapcsolófeszültséggel, ezért ennek hatása előbb–utóbb az i áram csökkenéséhez vezet. Amikor az armatúra áram zérussá válik, a gyorsító nyomaték megszűnik, és ettől kezdve a gép állandó szögsebességgel jár. A rendszeregyenletekből, vagy a gép hatásvázlatából szemléletesen következik, hogy állandó u_0, u_{g0}, m_{T0} bemenő jelek hatására a rendszer állandósult állapotba akkor kerül, ha a jelek differenciálhányadosai zérusok, ami egyenértékű azzal, hogy a hatásvázlat integráló tagjainak bemenő jelei zérusokká válnak. Legyenek bemenő jelek a motor $u_1=u(t)$ kapcsolófeszültsége, a $\varphi(t)$ gerjesztő fluxust előállító $u_2=u_g(t)$ gerjesztő feszültség, és az $u_3=m_T(t)$ terhelőnyomaték, kimenő jel pedig az $y_1=\omega(t)$ szögsebesség. Állapotváltozók lehetnek az $x_1=i(t)$ armatúra áram, az $x_2=\omega(t)$ szögsebesség és az $x_3=i_g(t)$ gerjesztő áram. A rendszeregyenletek alapján felépíthető hatásvázlat integráló tagjainak kimenő jelei az állapotváltozók, így a hatásvázlat alapján az állapotegyenletek közvetlenül felírhatók. A rendszer nemlineáris, amit a hatásvázlaton a *szorzó* tagok jelenítenek meg. A $k=cc_i$ jelöléssel az állapotegyenletek:

$$\begin{aligned}\frac{di(t)}{dt} &= \frac{1}{L} [-Ri(t) - k i_g(t) \omega(t) + u(t)] \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{1}{\theta} [k i(t) i_g(t) - m_T(t)] \\ \frac{di_g(t)}{dt} &= \frac{1}{L_g} [-R_g i_g(t) + u_g(t)]\end{aligned}$$

Az általános jelölésekkel:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{L} [-R x_1(t) - k x_3(t) x_2(t) + u_1(t)] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\theta} [k x_1(t) x_3(t) - u_3(t)] \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{L_g} [-R_g x_3(t) + u_2(t)] \\ y_1(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

Jellegzetes tulajdonságok: Harmadrendű (három állapotváltozó, három integráló tag)–, nemlineáris (szorzó tagok)–, három bemenő jelű (u_1 , u_3 feszültségek és az u_2 terhelő nyomaték)–, egy kimenő jelű (y szögsebesség) rendszer. A fizikai működésből következően az állandó bemenő jelek állandósult állapotban állandó kimenő jelet eredményeznek, vagyis a rendszer *önbeálló*.

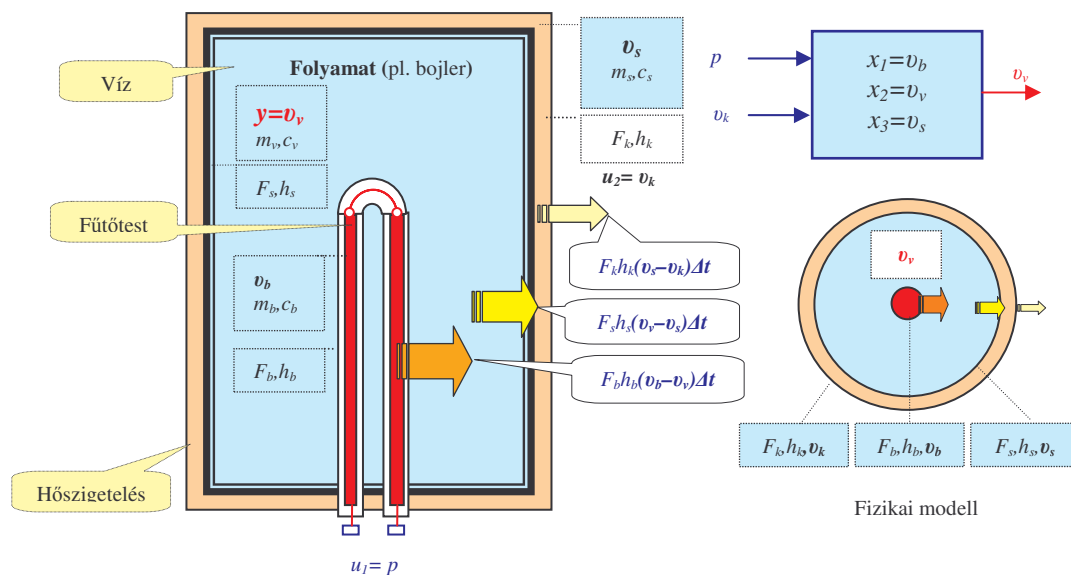
Termikus folyamat

Egy F_k külső felületű, hőszigetelt tartályban m_v tömegű, v_v hőmérsékletű víz van, amelyet a fűtőtesteken disszipált p villamos teljesítménnyel melegítünk. A homogén m_b tömegnek tekintett F_b felületű fűtőszálak hőmérséklete v_b . A villamos teljesítményből Δt idő alatt keletkezett $p \Delta t$ hőmennyiség Δv_b értékkel növeli a fűtőtest hőmérsékletét, illetve a $v_b - v_v$ hőmérsékletkülönbségtől függő $F_b h_b (v_b - v_v) \Delta t$ hőmennyiséget ad át az m_v tömegű víznek. Az $F_b h_b (v_b - v_v) \Delta t$ hőmennyiség Δv_v értékkel növeli a víz hőmérsékletét, illetve fedezi a hőszigetelésnek átadott $F_s h_s (v_v - v_s) \Delta t$ hőmennyiséget. Ez a hőmennyiség Δv_s értékkel növeli a hőszigetelés hőmérsékletét, és fedezi a környezetnek átadott $F_k h_k (v_s - v_k) \Delta t$ hőveszteséget (h_b , h_s , h_k hőátadási tényezők, F_b , F_s , F_k a hőátadó felületek). Az energiaegyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned}p \Delta t &= m_b c_b \Delta v_b + F_b h_b (v_b - v_v) \Delta t \\ F_b h_b (v_b - v_v) \Delta t &= m_v c_v \Delta v_v + F_s h_s (v_v - v_s) \Delta t \\ F_s h_s (v_v - v_s) \Delta t &= m_s c_s \Delta v_s + F_k h_k (v_s - v_k) \Delta t\end{aligned}$$

(c_b, m_b , c_v, m_v , c_s, m_s a fűtőtest-, a víz-, és a hőszigetelés fajhője, illetve tömege). Δt -vel osztva az egyenleteket, és $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet tekintve, a rendszer állapotegyenlete:

$$\begin{aligned}\frac{dv_b(t)}{dt} &= -\frac{F_b h_b}{m_b c_b} v_b(t) + \frac{F_b h_b}{m_b c_b} v_v(t) + \frac{1}{m_b c_b} p(t) \\ \frac{dv_v(t)}{dt} &= \frac{F_b h_b}{m_v c_v} v_b(t) - \frac{F_b h_b + F_s h_s}{m_v c_v} v_v(t) + \frac{F_s h_s}{m_v c_v} v_s(t) \\ \frac{dv_s(t)}{dt} &= \frac{F_s h_s}{m_s c_s} v_v(t) - \frac{F_s h_s + F_k h_k}{m_s c_s} v_s(t) + \frac{F_k h_k}{m_s c_s} v_k(t)\end{aligned}$$

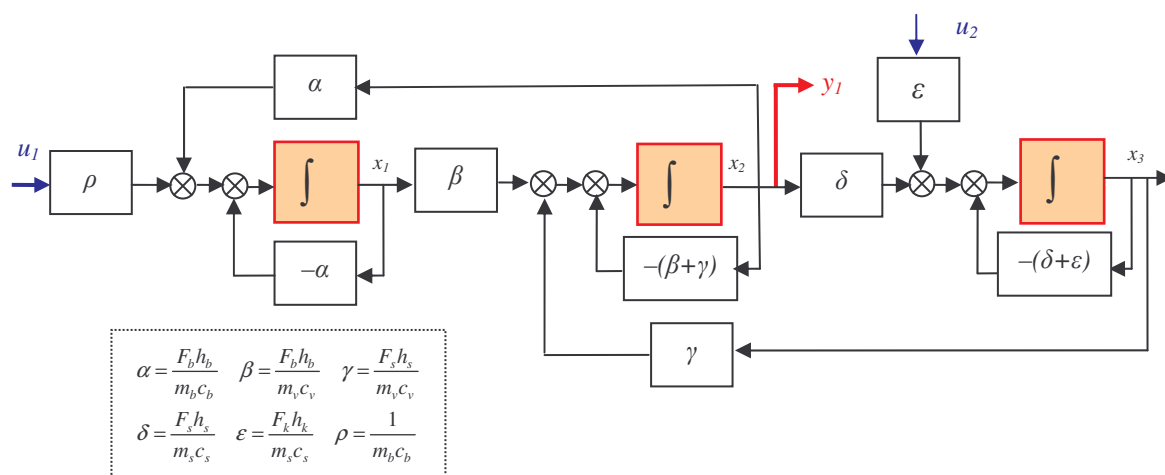


F6. ábra
Termikus folyamat szerkezeti vázlata

A folyamat bemenő jelei az $u_1=p$ hőteljesítmény, és az $u_2=v_k$ környezeti hőmérséklet, állapotváltozói az $x_1=v_b$, $x_2=v_v$, $x_3=v_i$ hőmérsékletek, kimenő jele pedig a víz $y_1=x_2=v_v$ hőmérséklete. Ezzel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{F_b h_b}{m_b c_b} x_1(t) + \frac{F_b h_b}{m_b c_b} x_2(t) + \frac{1}{m_b c_b} u_1(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{F_b h_b}{m_v c_v} x_1(t) - \frac{F_b h_b + F_s h_s}{m_v c_v} x_2(t) + \frac{F_s h_s}{m_v c_v} x_3(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= \frac{F_s h_s}{m_s c_s} x_2(t) - \frac{F_s h_s + F_k h_k}{m_s c_s} x_3(t) + \frac{F_k h_k}{m_s c_s} u_2(t) \end{aligned}$$

A kezdeti állapotban minden anyag a v_k környezeti hőmérsékleten van. A villamos teljesítmény bekapcsolását követően a fűtőtest melegedni kezd, ezért v_b , v_v , és v_s is növekszik, de a megfelelő szellőzés miatt v_k változatlan marad. Egyensúlyi helyzet (amikor is a hőmérsékletek már nem növekszenek tovább) olyan v_{b0} , v_{v0} , v_{s0} hőmérsékletértékeknél áll elő, amikor a rendszerbe bevitt hőteljesítmény azonos lesz, a környezetnek átadott hőteljesítménnyel. Az állapotegyenletek alapján felépíthető hatásvázlat:



F7. ábra
A termikus folyamat hatásvázlata

Jellegzetes tulajdonságok: harmadrendű (három állapotváltozó, három integráló tag)–, lineáris (arányos, integráló és összegző tagok)–, két bemenő jelű (u_1 teljesítmény, u_2 környezeti hőmérséklet)–, egy kimenő jelű (y_1 hőmérséklet) rendszer. A fizikai működés alapján kikövetkeztethető, hogy állandó u_{10} , u_{20} bemenő jelek mellett létrejön a kimenő jel y_0 állandósul értéke, vagyis *önbeálló* folyamatról van szó.

F2. Dinamikus rendszer állapotegyenlete

Mint ahogy az a példákban látható, a j számú bemenettel, k számú kimenettel, n számú állapotváltozóval rendelkező (n -ed rendű, több bemenetű, több kimenetű) **MIMO** (Multi Input, Multi Output) dinamikus rendszer matematikai modelljének egy lehetséges alakja (a rendszer **állapotegyenlete**):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\ y_1(t) &= g_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\ &\vdots \\ y_k(t) &= g_k[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \end{aligned}$$

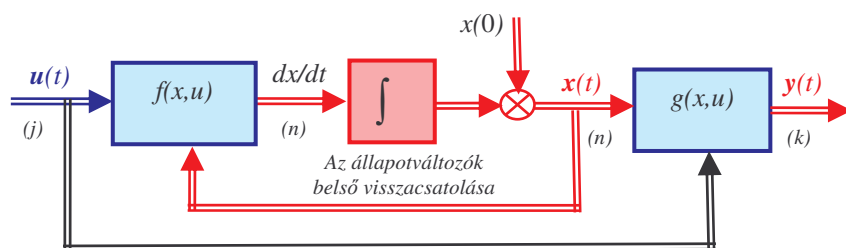
Ez az egyenletrendszer n számú, elsőrendű közönséges *differenciálegyenletet*, és k számú nemlineáris *algebrai egyenletet* tartalmaz. A megoldandó feladat: adott $u(t)$ gerjesztés, és az állapotváltozók $x(0)$ kezdeti feltételei mellett, ismert f és g függvények esetében meg kell határozni az $y(t)$ kimenő jelet (az $u(t)$ *gerjesztésre adott $y(t)$ választ*). E kérdéskörben elsődleges szerepe a differenciálegyenletrendszer $x(t)$ megoldásának van, mert $x(t)$ és $u(t)$ ismeretében $y(t)$ kiszámítása már csupán egy algebrai művelet. Bevezetve a mátrixalgebrában használt

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix}$$

oszlopvektor jelöléseket, az n számú elsőrendű, közönséges differenciálegyenletből, és k számú algebrai egyenletből álló egyenletrendszer vektor–differenciálegyenlet formájában is felírható. Ennek alakja:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f[x(t), u(t)] \\ y(t) &= g[x(t), u(t)] \end{aligned}$$

ahol $x(t)$: az **állapotváltozó** vektor ($n \times 1$), $dx(t)/dt$: az **állapotsebesség** vektor ($n \times 1$), $u(t)$: a **bemenőjel** (gerjesztés) vektor ($j \times 1$), $y(t)$: a **kimenőjel** (válasz) vektor ($k \times 1$)⁹¹. Az állapotegyenletet – a mérnöki szemléletmódhoz a képletekhez képest közelebb álló, de azért azokkal egyenértékű – hatásvázlattal is szemléltethetjük:



F8. ábra
Dinamikus rendszer állapotegyenletét szemléltető hatásvázlat

A hatásvázlaton az $f(x,u)$ és $g(x,u)$ függvényeket absztraháló tagok **algebrai** függvénykapcsolatot fejeznek ki a közvetlen bemenő-, és kimenő jelek között, aminek jelentése az, hogy bemenő jelek megváltozására, a közvetlen kimenő jelek megváltozásával, *késleltetés nélkül* (azonnal) reagálnak. Az **integráló tag** a hatásvázlat **dinamikus** tagja, x kimenő jele a $dx(t)/dt$ bemenő jelének az időszerinti integrálja. Ebből következik, hogy az

⁹¹ A bevezető példákban bemutatott fizikai rendszerek mindegyike hasonló matematikai modellel rendelkezett. Ez a modell a rendszerleírás meghatározó kifejezése, melyben az első egyenlet n számú, *elsőrendű közönséges differenciálegyenletből* álló differenciálegyenlet rendszer, a második k számú nemlineáris egyenletből álló algebrai egyenletrendszer. Ha $f(x,u) = Ax(t) + Bu(t)$, $g(x,u) = Cx(t) + Du(t)$, akkor a dinamikus rendszer lineáris. A rendszer kauzális, az y kimenő jele az u bemenő jel múltbeli-, és az aktuális értékétől függ. A rendszer időinvariáns, ha a bemenő jelre adott válasza nem függ a bemenőjel alkalmazásának időpontjától. Az **LTI** (**L**inear **T**ime-**I**nvariant) betűszó a lineáris időinvariáns rendszer elnevezése.

integráló tag – véges értékű bemenőjel változás hatására keletkező – kimenő jelének megváltozásához időre van szükség. A hatásvázlat szemléletesen jeleníti meg a dinamikus rendszer jelei közötti okági viszonyokat és állapotváltozóinak **belső visszacsatolását** is⁹².

Fontos észrevennünk, hogy a tartályok, és az elektromechanikai rendszer állapotegyenletei **nemlineáris** egyenletek, szemben az RLC áramkör, a hidraulikus erősítő és szervomotor, és a termikus folyamat állapotegyenleteivel, amelyek **lineáris** differenciálegyenletekből és lineáris algebrai egyenletekből állnak. Ez utóbbi esetekben $f(x,u)=Ax(t)+Bu(t)$, $g(x,u)=Cx(t)+Du(t)$, és a dinamikus rendszer lineáris⁹³.

A dinamikus folyamat – állapotegyenlet alakjában felírható – modellje a rendszer fizikai törvényszerűségeit tartalmazó matematikai leírás (Kirchhoff-, Newton törvények, az energia megmaradás elvei, a hőátadás és hővezetés törvényei, a Bernoulli egyenletek, az anyagegyensúlyi egyenletek, stb.). Ezek a leírások a valóságos működésnek egyfajta idealizált közelítései, így sok másodlagos jelenség elhanyagolását tartalmazzák.

Megjegyzés.

A tartályok esetében például elhanyagoltuk a kiáramlás helyén keletkező turbulenciát (pedig a kiáramlásban a turbulencia jelen van), az RLC áramkör esetében idealizált áramköri elemeknek tekintettük az R ellenállást, az L induktivitást és a C kapacitást (pedig az ellenállás hőmérsékletfüggő, az induktivitást a relatív permeabilitás is befolyásolja, és a kondenzátornak átvezetési ellenállása is van). A hidraulikus szervomotor esetében nem vettük figyelembe felülkötést, és az érzéketlenségi sávot. Az elektromechanikai rendszer tárgyalásakor elhanyagoltuk a vas mágneses telítődését, a kefék átmeneti ellenállását, a légellenállást, az armatúra reakciót. A termikus folyamat esetében homogén anyagnak tekintettük a fűtőellenállást és ennek szigetelését, egyenletes hőmérséklet eloszlást tételeztünk fel a különféle agyagokban, elhanyagoltuk a hőszugárzást, stb.

Mindezekből az következik, hogy az állapotegyenlet alakjában megjelenő matematikai modell a valóságnak egy közelítését jelenti. Ennek ellenére ez a matematikai modell igen hasznos, mivel egy adott tartományban a vizsgálatokhoz helyettesítheti a tényleges fizikai rendszert, alkalmat teremtve ezzel arra, hogy az irányító berendezést a folyamat modelljéhez tervezhessük, vagy a mennyiségi problémákat a nélkül kezelhessük, hogy a valóságos rendszeren méréseket kelljen elvégeznünk.⁹⁴

A szabályozástechnika tárgykörében – legyen szó akár a szabályozóról, vagy a folyamatról, akár pedig a teljes szabályozási rendszerről – általában a dinamikus rendszert leíró (kauzális és időinvariáns)⁹⁵

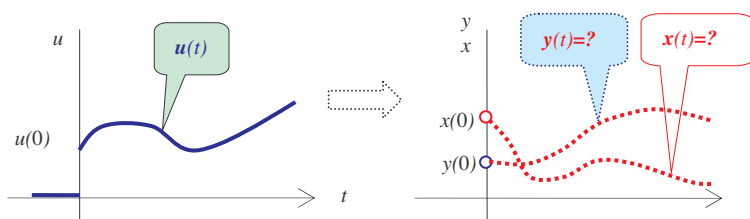
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

állapotegyenlet $x(t)$ és $y(t)$ megoldását a $0 < t < \infty$ időintervallumban keressük, olyan feltételek mellett, amikor a rendszer $x(0)$ kezdeti állapota adott érték, ismerjük az f és g függvényeket, és az $u(t)$ gerjesztés egy tetszőleges, de adott

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

un. **belépő időfüggvény**.



F9. ábra
A belépő $u(t)$ -re adott $x(t)$ és $y(t)$ válaszok

Az y válasz értéke a $t=0$ időpontban – az adott g függvénykapcsolat és $x(0)$ kezdeti feltétel mellett – $y(0)=g(x(0), u(0))$. Az $x(t)$ és az $y(t)$ időfüggvények analitikus megoldása csupán néhány speciális $f(x,u)$ és $g(x,u)$

⁹² A tagokat összekötő, és a jeleket szimbolizáló nyíllal ellátott kettős vonalak a hatásirányt (az ok-okozat relációt) jelölik, illetve azt érzékeltetik, hogy minden tagnak több bemenő-, és több kimenő jele is lehet.

⁹³ A lineáris differenciálegyenlettel leírható rendszereknek egységes rendszerelmélete van, ezért meghatározó jelentőségűek.

⁹⁴ Egy dinamikus rendszer matematikai modelljét a rendszerre kapcsolt bemenő jeleknek, és az erre adott válasznak kísérleti meghatározása alapján is felépíthetjük (rendszeridentifikáció).

⁹⁵ **Kauzalitás:** az ok-okozati relációnak megfelelően a kimenő jel aktuális értéke a bemenő jelnek kizárólag a múltbeli, és az aktuális értékétől függ, és független a bemenőjel jövőbeli értékeitől. **Időinvariancia:** a bemenetre adott válasz minősége nem függ attól, hogy ezt mikor kapcsoljuk a rendszerre.

függvény esetében létezik⁹⁶, általában numerikus megoldások jöhetnek szóba (*Euler*–, *Adams*–, *Runge–Kutta*–, másodfokú extrapoláció–, stb. módszerek⁹⁷). A legegyszerűbb eljárás a lineáris extrapoláció (*Euler* módszer).

Az *Euler* módszer:

Ha T a számítás lépésköze⁹⁸, és T elég „kicsi”, akkor $u(kT)$, $x(kT)$, $y(kT)$ ismeretében az $x(t)$ megoldás $[dx(t)/dt]_{t=kT}$ meredeksége a $t=kT$ időpontban adott. Ennek figyelembevételével az állapotváltozó $x((k+1)T)$ értéke:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=kT} &= f(x(kT), u(kT)) \cong \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \\ x((k+1)T) &\cong x(kT) + f(x(kT), u(kT))T \\ y(kT) &\cong g(x(kT), u(kT))\end{aligned}$$

Szabályozási rendszerek analízisekor gyakran előzetesen felvett $u(t)$ **determinisztikus vizsgáló jelekre** keressük az állapotegyenlet megoldását. Ezek a vizsgáló jelek rendszerint a $\delta(t)$ *Dirac delta*, az $1(t)$ *egységugrás*, a $t1(t)$ *sebességugrás*, a $(t^2/2!)$ $1(t)$ *gyorsulásugrás*, stb. időnek hatványfüggvényei, valamint az $u(t)=u_{\max}\sin(\omega t)$ *harmonikus időfüggvény*.

F3. Munkaponti linearizálás

Ljapunov első (közvetett) stabilitási kritériuma

A dinamikus rendszer igen lényeges kérdése a rendszer **stabilitása**. A különféle stabilitás elméletek ezt a kérdéskört részletesen feldolgozzák⁹⁹. A nemlineáris rendszernek az állandó u_0 gerjesztés hatására lehetnek olyan állapotai, amelyekben a $dx(t)/dt$ állapotsebesség értéke zérus. Az állapotról ilyen x_0 állapotkoordinátákkal rendelkező helyei a rendszer **egyensúlyi pontjai**¹⁰⁰. Ha ezek környezetéből induló mozgás $t \rightarrow \infty$ mellett az egyensúlyi pontba tart, **stabilis**–, ha viszont ide befutni nem képes, és ettől távolodik, **labilis** egyensúlyi pontról van szó. Az egyensúlyi pont stabilis–, vagy labilis voltának eldöntésére jól használható *Ljapunov* első stabilitási kritériuma,¹⁰¹ amely az egyensúlyi pontban lévő rendszer közelítő lineáris matematikai modelljén alapszik. A **munkaponti linearizálást**, és **Ljapunov közvetett módszerét** egy $n=2$ másodrendű rendszer állapotegyenletére mutatjuk be, értelemszerűen azonban $n=1$, illetve $n>2$ esetre is alkalmas eljárásról van szó.

Legyen a másodrendű nemlineáris rendszer állapotegyenlete:¹⁰²

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), u_1(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), u_2(t))\end{aligned}$$

Ezekből a rendszer hatásvázlata is egyszerűen felépíthető. A dx_1/dt , illetve a dx_2/dt állapotsebességeknek megfelelő jeleket integráló tagok bemeneteire kapcsolva, azok kimenetein az x_1 és az x_2 állapotváltozóknak megfelelő jelek jönnek létre. Az integrátorok bemenetein működtetett állapotsebességek az f_1 és az f_2 függvénygenerátorok segítségével, az x állapotváltozókból, és az u bemenő jelekből állíthatók elő. Ennek alapján az állapotegyenlethez rendelhető hatásvázlat:

⁹⁶ Ha $f(x, u) = Ax(t) + Bu(t)$ és $g(x, u) = Cx(t) + Du(t)$, akkor a rendszer lineáris, és az állapotegyenletnek van analitikus megoldása.

⁹⁷ Az állapotegyenlet numerikus megoldását a **MATLAB ode23** és **ode45** függvényi támogatják. Ezek az eljárások általában a többlépéses *Runge–Kutta* módszert alkalmazzák.

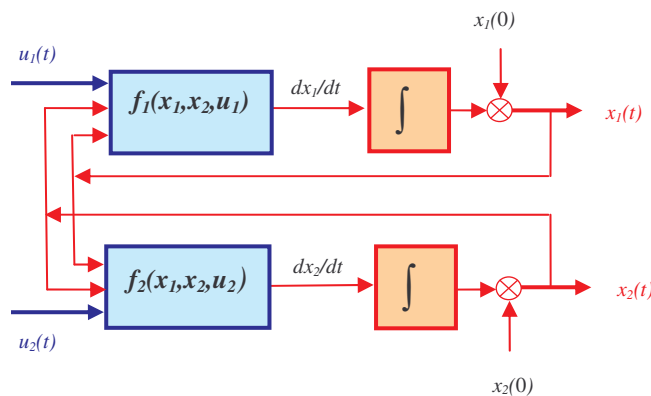
⁹⁸ A számítás T lépésköztől körültekintően kell megválasztani. A nem elég kis értékre választott lépésköz mellett kapott $x(kT)$ eredmény a tényleges $x(t)$ időfüggvénynek igen durva közelítését eredményezheti, sőt, a numerikus instabilitás fellépétekor elfogadhatatlan „megoldást” kapunk. Az indokolatlanul kis lépésköz ugyan növeli a számítás pontosságát, de jelentősen megnövekszik a számítási idő. Mindezek miatt a lépésköz megválasztásához célszerű, ha a várható $x(t)$ megoldásról valamiféle elképzelésünk van.

⁹⁹ Irodalom: **L.Sz. Pontrjagin: Közhosszú differenciálegyenletek.** (Akadémiai Kiadó). *Csáki Frigyes: Korszerű szabályozástechnika.* (Akadémiai Kiadó).

¹⁰⁰ Az egyensúlyi pontokat a rendszer **szinguláris pontjainak** is nevezik.

¹⁰¹ *Ljapunov* direkt (második, közvetlen) módszere a nemlineáris rendszer globális stabilitásának vizsgálatára is alkalmas. Nehézkés eljárása miatt a gyakorlati alkalmazásban nem terjedt el.

¹⁰² Az $y=g(x, u)$ egyenletet most nem kell figyelembe vennünk, mert ha az állandó u_0 hatására létrejön az állapotváltozóknak az x_0 állandósult értéke, akkor létezik az $y_0=g(x_0, u_0)$ állandósult érték is.



F10. ábra
Másodrendű rendszer hatásvázlata

Ha az $u_1(t)=u_{10}\mathbf{1}(t)$ és $u_2(t)=u_{20}\mathbf{1}(t)$ gerjesztések időben állandó jelek, akkor a **(P)** jelű egyensúlyi állapotban – ha ez az adott gerjesztések hatására ki tud alakulni – az állapotsebességek zérusok, és ezért ebben a **(P)** pontban az x_{10} , x_{20} állapotkoordinátáknak ki kell elégíteniük az

$$\begin{aligned} f_1(x_{10}, x_{20}, u_{10}) &= 0 \\ f_2(x_{10}, x_{20}, u_{20}) &= 0 \end{aligned}$$

nemlineáris algebrai egyenletrendszert. Ha a **(P)** jelű munkapontban a rendszer gerjesztő jelei $\Delta u_1(t)$ és $\Delta u_2(t)$ értékkel megváltoznak, ez szükségszerűen azt vonja maga után, hogy az állapotváltozókban is $\Delta x_1(t)$ és $\Delta x_2(t)$ változások jönnek létre. Az állapotegyenlet azonban ekkor is érvényes marad, tehát:

$$\begin{aligned} \frac{d(x_{10} + \Delta x_1(t))}{dt} &= f_1(x_{10} + \Delta x_1(t), x_{20} + \Delta x_2(t), u_{10} + \Delta u_1(t)) \\ \frac{d(x_{20} + \Delta x_2(t))}{dt} &= f_2(x_{10} + \Delta x_1(t), x_{20} + \Delta x_2(t), u_{20} + \Delta u_2(t)) \end{aligned}$$

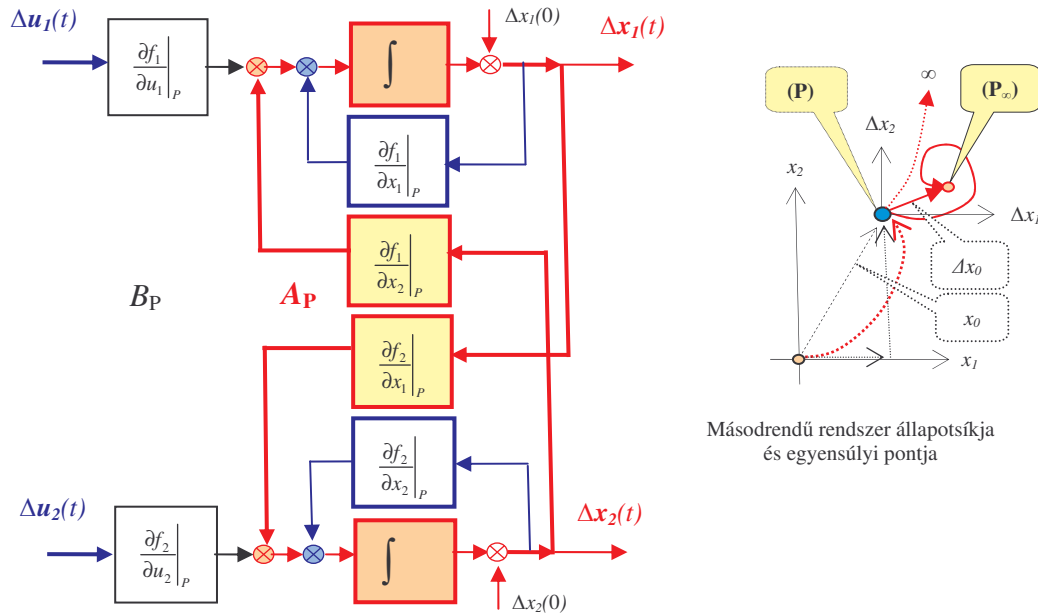
Ha az f_1 és f_2 függvények Taylor sorba fejthetők (vagyis folytonosak, és legalább egyszer differenciálhatóak), valamint a jelek megváltozásai „kicsik”, akkor a sorfejtés másodrendűen kis mennyiségei elhanyagolhatók. Figyelembe véve, hogy $dx_{10}/dt=f_1(x_{10}, x_{20}, u_{10})=0$, $dx_{20}/dt=f_2(x_{10}, x_{20}, u_{20})=0$, a **(P)** munkapont „kis” környezetében lejátszódó jelenségek közelítő leírására az alábbi **lineáris matematikai modell** is használható:¹⁰³

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} &\equiv \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2, u_1)}{\partial x_1} \right|_P \Delta x_1(t) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_2} \right|_P \Delta x_2(t) + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2, u_1)}{\partial u_1} \right|_P \Delta u_1(t) \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} &\equiv \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_1} \right|_P \Delta x_1(t) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_2} \right|_P \Delta x_2(t) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial u_2} \right|_P \Delta u_2(t) \end{aligned}$$

A lineáris modell vektor–differenciálegyenlet formájában felírható alakja, és az ehhez rendelhető hatásvázlat:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1}{dt} \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_P & 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \\ \frac{d\Delta x(t)}{dt} &= A_P \Delta x(t) + B_P \Delta u(t) \end{aligned}$$

¹⁰³ A parciális deriváltakban szereplő P index az állapotváltozók, és a gerjesztés x_0 , u_0 munkaponti értékeire utal.



F11. ábra

A másodrendű linearizált rendszer hatásvázlata

A_P az adott munkapontban linearizált rendszer **állapotmátrixa**, B_P pedig a bemeneti mátrix. Láthatóan mindegyik mátrixban a (P) munkapont adatai szerepelnek.

*Ljapunov első (közvetett) stabilitási kritériuma szerint, ha a nemlineáris rendszert az egyensúlyi pont környezetében a közelítő $d\Delta x(t)/dt = A_P \Delta x(t) + B_P \Delta u(t)$ lineáris vektor-differenciálegyenlet matematikai modelljével írjuk le, akkor az így keletkezett modell A_P állapotmátrixának sajátértékei alapján az egyensúlyi pont stabilitása eldönthető. **Ha a linearizált rendszer A_P állapotmátrixának minden λ_i sajátértékére a $real(\lambda_i) < 0$ teljesül, akkor a rendszer – az egyensúlyi pont „kis” környezetében – aszimptotikusan stabilis, vagyis az egyensúlyi pontjából kitérített rendszer visszatér oda.** Ekkor az állapottér (P) pontja **stabilis egyensúlyi pont**. Ha A_P sajátértékei között van olyan, amelyeknek valós része pozitív, akkor a rendszer labilis, vagyis munkapontjából kitérítve *nem tér vissza* oda. Ekkor az állapottér (P) pontja **labilis egyensúlyi pont**. Ha a sajátértékek valamelyike zérus, a kritérium érvényét veszti. Nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy a linearizálás módszere akkor használható, ha az $f(x,u)$ nemlineáris függvények legalább egyszer differenciálhatóak, vagyis a jelleggörbék érintői a munkapontokban jól közelítik magukat a nemlineáris függvényeket.*

Az

$$A_P = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

állapotmátrix sajátértékei a $\det(\lambda I - A_P) = 0$ karakterisztikus egyenletének a gyökei. Ezek a tárgyalt másodrendű rendszer esetén $\det(\lambda I - A_P) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \text{tr}(A_P)\lambda + \det(A_P) = 0$, és

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A_P) \pm \sqrt{(\text{tr}(A_P))^2 - 4\det(A_P)}}{2}$$

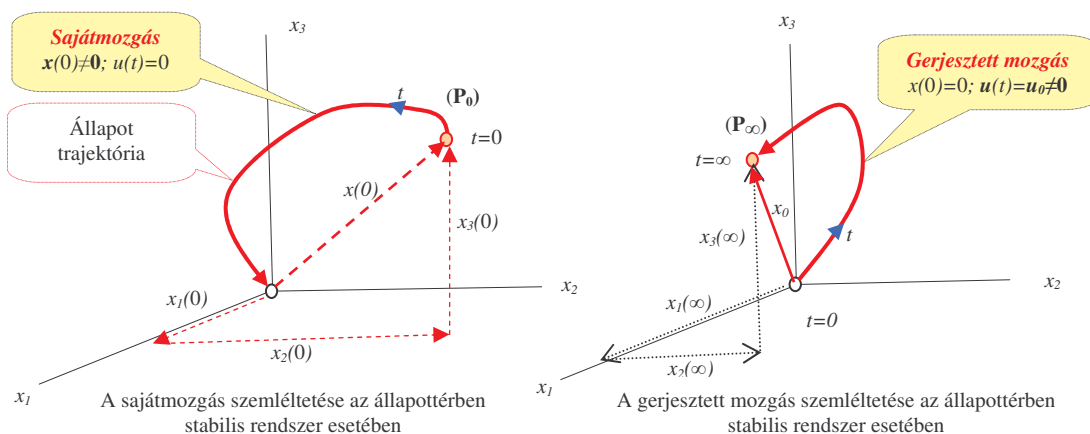
A $\text{tr}(A_P) = a_{11} + a_{22}$ az adott (P) egyensúlyi ponthoz tartozó A_P állapotmátrix *nyoma*, a $\det(A_P) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ pedig az A_P *determinánsa*. Attól függően, hogy a kérdéses (P) pontban linearizált rendszer karakterisztikus egyenletének a $\lambda_{1,2}$ gyökei a komplex számsíkon hol helyezkednek el, az egyensúlyi pontok típusai kategóriákba sorolhatók. Ezek:

$real(\lambda_1)$	$imag(\lambda_1)$	$real(\lambda_2)$	$imag(\lambda_2)$	Az egyensúlyi pont típusa
–	0	–	0	stabilis csomópont
+	0	+	0	labilis csomópont
–	+	–	–	stabilis fókuszpont
+	+	+	–	labilis fókuszpont
0	+	0	–	centrum
+	0	–	0	labilis nyeregpont

Stabilis **fókusz** és **csomópont** esetében a munkapont környezetéből indított mozgás a munkapontba fut, labilis fókusz, csomópont és **nyeregpont** esetében a munkapont környezetéből indított mozgás a munkaponttól távolodik, vagy egy stabilis munkapont felé, vagy pedig a $\pm\infty$ -be tartva. A **centrum** típusú munkapont környezetében a rendszerben periodikus lengőmozgás jöhet létre.

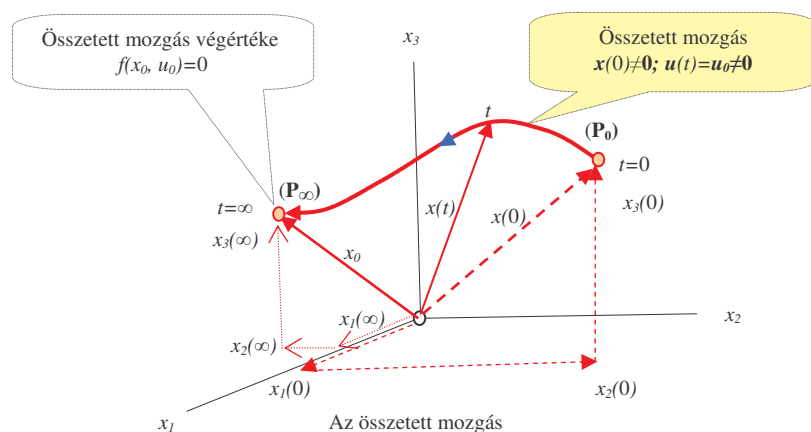
A stabilitás-, vagy labilitás jelensége az x állapotváltozók – mint állapotkoordináták – által létesített n dimenziós állapottérben is szemléltethető. A tranzienst folyamat $x(t)$ állapotvektora a $t=0$ időpontban az $x(0)$ kezdeti feltételek koordinátaival meghatározott vektor, amely az állapottér (P_0) pontjába mutat. Az $x(t)$ vektor végpontja a mozgás folyamán egy n dimenziós térgörbét ír le, ez a térgörbe az **állapottrajektória**. A dinamikus rendszer n rendszáma $n \geq 1$ lehet. $n=1$ esetében a rendszer elsőrendű, ezért itt az állapottér a számegyenes, vagyis ekkor az $x(t)$ időfüggvény ábrázolása a trajektóriához képest szemléletesebb. $n=2$ esetében az állapottér **állapotsíkra** egyszerűsödik, ekkor a trajektóriákkal történő szemléltetés igen hatásos. Így van ez $n=3$ esetében is, bár itt a háromdimenziós térben a trajektória egy időben paraméterezett térgörbe, aminek ábrázolásához már a számítógépes szolgáltatások igénybevétele is indokolt. $n>3$ esetében a szemléltetés nehézkessé válik.

Ha az $x(0)$ kezdeti feltételek, és az $u(t)=u_0 1(t)=\text{állandó}$ gerjesztés, $f(x(0), u(0))=0$ állapotsebességet eredményeznek az integráló tag bemenetén (lásd a rendszer hatásvázlatát), akkor a rendszer a (P_0) pontból kimozdulni nem képes. Ha viszont $f(x(0), u(0)) \neq 0$ akkor az integráló tag $[dx(t)/dt]_{t=0} = f(x(0), u(0)) \neq 0$ bemenő jele az integráló tagot „működésbe” hozza. Ennek hatására mind az állapotváltozóknak, mind a kimenő jeleknek, az időbeli változásai jönnek létre. Ha az állandó u_0 hatására az állandósult állapot létrejön, akkor itt az állapotsebesség zérus, ezért a jelek állandósult értékei az $dx_0/dt = f(x_0, u_0) = 0$, $y_0 = g(x_0, u_0)$ kapcsolatot ki kell, hogy elégítsék. Ennek az egyenletrendszernek adott u_0 melletti x_0 és y_0 megoldásai a rendszer **egyensúlyi helyzetének** koordinátáit határozzák meg. Az f , és g nemlineáris függvénykapcsolatoktól függően egy adott u_0 -hoz több egyensúlyi pont is tartozhat, és ezek mindegyike **stabilis**, **vagy labilis** egyensúlyi helyzetet jellemezhet. A labilis egyensúlyi helyzet „virtuális egyensúlyi állapot”, mert a jelek bármekkora kis eltérése esetén a rendszer ezt az egyensúlyi helyzetét elhagyja. A különféle mozgásokat háromdimenziós trajektórián szemléltethetjük:



F12. ábra

A sajátmozgás és a gerjesztett mozgás szemléltetése állapottrajektóriákkal



F13. ábra

Az összetett mozgás szemléltetése az állapotterben stabilis rendszer esetében

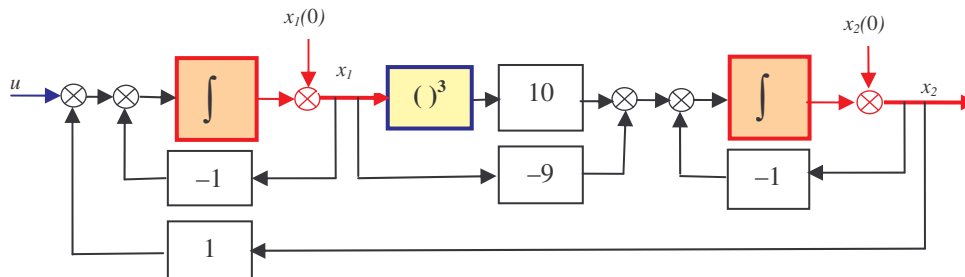
Ha a gerjesztés zérus ($u=0$), a mozgást az állapotváltozók $x(0) \neq 0$ kezdeti értékei generálják. Ez a mozgás a rendszer **sajátmozgása**, amely stabilis rendszer esetében az állapotter origójába „ér véget”. Ha a kezdeti feltételek mindegyike zérus, és a mozgást az $u(t)$ gerjesztés generálja, akkor a rendszer **gerjesztett mozgásáról** van szó. Állandó u_0 , és stabilis rendszer esetében ez a mozgás az állapotter origójából indul, és az állapotter egy (P_∞) jelű **egyensúlyi pontjába** tart. Ha $x(0) \neq 0$, és $u(t) = u_0 \mathbf{1}(t) \neq 0$, a mozgás összetett. Stabilis rendszer esetében az összetett mozgás az állapotter (P_0) pontjából indul, és a (P_∞) pontjába ér véget, vagyis a $t = \infty$ időpontban az $x(\infty) = x_0$ koordinátákkal létrejön az állapotváltozók mindegyikének az egyensúlyi értéke. *Labilis rendszer esetében az $x(0)$ kezdeti feltételből induló sajátmozgás, vagy az origóból induló gerjesztett mozgás trajektóriái általában minden határon túl növekedő jellegű mutatnak.*

Példa.

Adott az alábbi másodrendű nemlineáris rendszer állapotegyenlete, és az ehhez rendelt alaptagokból kialakítható hatásvázlat:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = 10(x_1(t))^3 - 9x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

$u(t)=0$ esetre adjuk meg a rendszer állapottrajektóriáit.



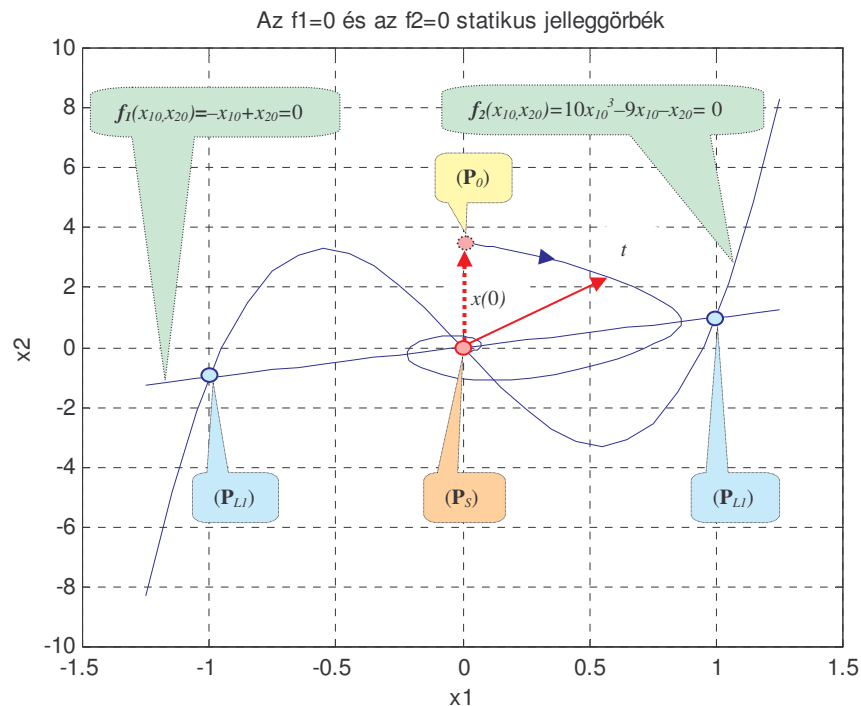
F14. ábra

A rendszer hatásvázlata

A rendszer nemlinearitását az egyenletekben szereplő $(x_1)^3$ tényező okozza, amit a hatásvázlaton a $()^3$ jelű nemlineáris köbreemelő tag képvisel. Gerjesztetlen rendszer esetében $u(t)=0$, ezért ekkor a rendszer mozgását az $x(0) \neq 0$ kezdeti feltételek hozzák létre. $u=0$ mellett a rendszer olyan x_0 állapotváltozókkal lehet egyensúlyi helyzetben, amelyek koordinátái kielégítik a

$$\begin{aligned} \frac{dx_{10}}{dt} &= f_1(x_{10}, x_{20}) = -x_{10} + x_{20} = 0 \\ \frac{dx_{20}}{dt} &= f_2(x_{10}, x_{20}) = 10x_{10}^3 - 9x_{10} - x_{20} = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Az egyensúlyi pontok az $f_1(x_{10}, x_{20})=0$, $f_2(x_{10}, x_{20})=0$ függvények közös pontjaiban vannak. Ha az $x_1 \sim x_2$ állapotsíkon ábrázoljuk ezeket az $f_1(x_{10}, x_{20})=0$, $f_2(x_{10}, x_{20})=0$ függvényeket, az alábbi ábrát kapjuk:



F15. ábra

A statikus jelleggörbék, és a (P_0) pontból induló trajektória

A statikus karakterisztikák metszéspontjainak (a rendszer három egyensúlyi pontjának) koordinátái:

Egyensúlyi pont	x_{10}	x_{20}
P_{L1}	-1	-1
P_S	0	0
P_{L2}	1	1

Az egyensúlyi pontban linearizált rendszer A_P állapotmátrixa és ennek karakterisztikus egyenlete:

$$A_P = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 30x_{10}^2 - 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_P) = (\lambda + 1)^2 - 30x_{10}^2 + 9 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 30x_{10}^2 + 10 = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei és a munkapontok típusai a három munkapontban:

	x_{10}	λ_1	λ_2	Típus
P_{L1}	-1	$-1 - \sqrt{21}$	$-1 + \sqrt{21}$	Nyeregpont (labilis)
P_S	0	$-1 + 3j$	$-1 - 3j$	Fókuszpont (stabilis)
P_{L2}	1	$-1 + \sqrt{21}$	$-1 - \sqrt{21}$	Nyeregpont (labilis)

A (P_S) környezetéből induló trajektória a **stabilis** (P_S) pontba fut, szemben a (P_{L1}) **labilis** pontok környezetéből induló trajektóriákkal, amelyek a (P_{L1}) környezetét elhagyják. A rendszer globális viselkedésének tanulmányozására egy lehetséges módszer, ha az $x_1 \sim x_2$ állapotsíkon ábrázolunk egy rácshálózat pontjaiból induló trajektória sereget. Ebből képet kaphatunk arról, hogy a teljes állapotsíkon milyen mozgásvizonyok jöhetnek létre, attól függően, hogy milyen $x(0)$ kezdeti feltétel által meghatározott pontból indul a tranziens. A trajektóriák ábrázolásához számítógépes módszerek igénybevétele célszerű, mivel nagy számban kell az állapotegyenletet megoldani. A teljes állapotsíkot feltérképező MATLAB program:

```

to=0;tv=5;xo=[-1.2 1.2];tv=input('tv=');xo=input('xo=');
[t,x]=ode45('fnr',[to tv],xo);
plot(x(:,1),x(:,2)); grid;pause;plot(t,x(:,1),t,x(:,2)); grid;pause;
[t,x]=ode45('fnr',[to tv],[0 3.5]);
x1=-1.25:.1:1.25;x2=x1;plot(x1,x2);hold;
plot(x1,10*x1.^3-9*x1);grid;pause;plot(x(:,1),x(:,2));

```

```

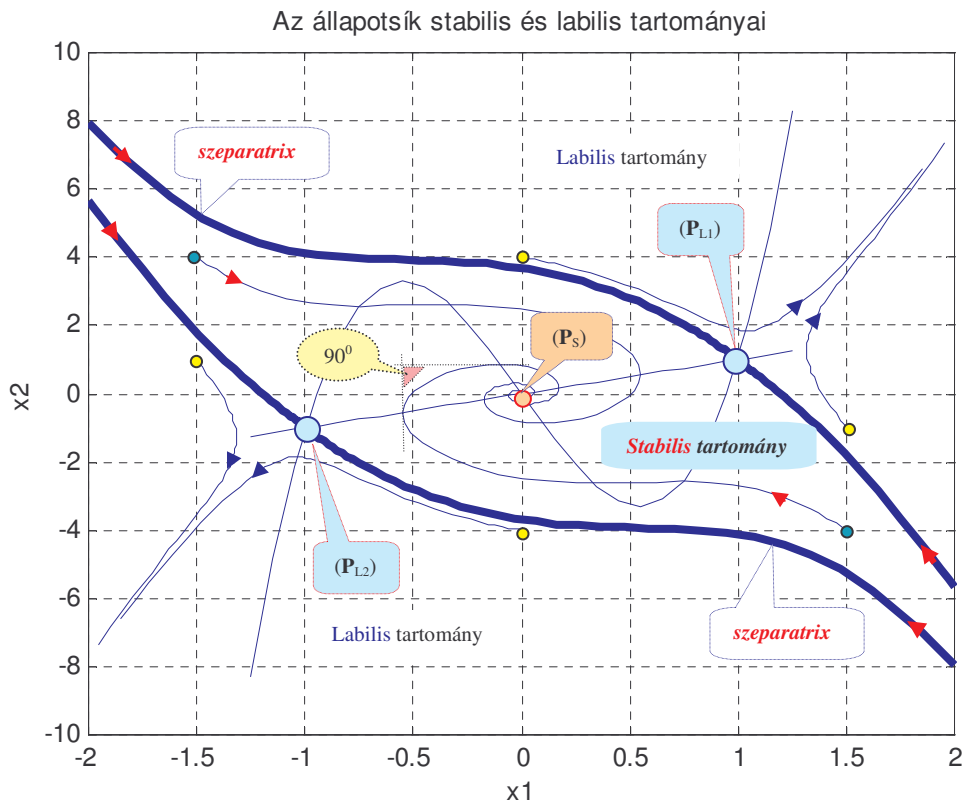
title('Az f1=0 és az f2=0 statikus jelleggörbék');
xlabel('x1');ylabel('x2');
pause;clf;
%A szeparatrix számítása
[t,x]=ode45('fnr',[0 1],[-2 7.965]);plot(x(:,1),x(:,2));hold;
[t,x]=ode45('fnr',[0 1],[2 -7.965]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 1],[-2 5.677]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 1],[2 -5.677]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 1],[0 4]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 1],[0 -4]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 0.5],[-1.5 1]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 0.5],[1.5 -1]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 5],[-1.5 4]);plot(x(:,1),x(:,2));
[t,x]=ode45('fnr',[0 5],[1.5 -4]);plot(x(:,1),x(:,2));
plot(x(:,1),x(:,2));grid;plot(x1,x2);plot(x1,10*x1.^3-9*x1);
title('Az állapotstabilis és labilis tartományai');
xlabel('x1');ylabel('x2');pause;clf;
% Az fnr.m fájl
function xd=fnr(t,x);
    xd(1)=-x(1)+x(2);
    xd(2)=10*x(1).^3-9*x(1)-x(2);
    xd=xd';

```

A program futásából itt azt az eredményt közöljük, amely az állapotstabilis feltevést a speciális trajektóriát (a **szeparatrixot**), amely a **stabilis-labilis** tartományokat egymástól elválasztja. Láthatóan a sík egy jól meghatározott, stabilis tartományból indított mozgás a (P_s) stabilis egyensúlyi pontba tart, szemben a labilis tartományokból indított mozgással, amelynek állapotváltozóit a végtelen felé tartanak. A szeparatrix egy olyan speciális trajektória, amelyről indított mozgás a labilis egyensúlyi pontba futna, de ha az indítási pont bármilyen kis eltéréssel nincs a szeparatrixon, a mozgás vagy a (P_s)-be, vagy a $\pm\infty$ -be tart. A trajektória az öt leíró:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{10x_1^3 - 9x_1 - x_2}{-x_1 + x_2}$$

differentiálegyenlet $x_2=F(x_1)$ megoldásaként is számítható. Láthatóan $f_2=0$ esetében $dx_2/dx_1=0$, illetve $f_1=0$ esetében $dx_2/dx_1=\infty$. Ezért a trajektória $x_2=F(x_1)$ függvényének grafikonja vízszintesen metszi az $f_2=0$ -, illetve függőlegesen metszi az $f_1=0$ függvényt.



F16. ábra
A stabilis-labilis tartományokat szétválasztó szeparatrix

Figyeljük meg, hogy a stabilis fókuszpontba befutó trajektória egy *logaritmikus spirális*-, a nyeregpont környezetében haladó trajektória pedig *hiperbolikus* jelleget mutat.

Példa.

A nemlineáris rendszerek egy különleges állapotegyenlete a *Lorenz* egyenlet. Ennek alakja:

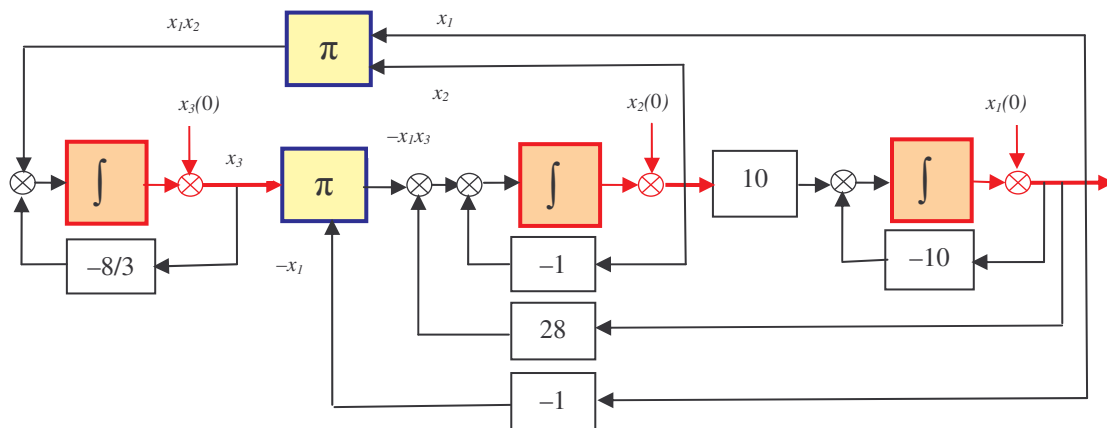
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 10(-x_1(t) + x_2(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 28x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = f_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - \frac{8}{3}x_3(t)$$

Határozzuk meg a rendszer egyensúlyi pontjainak koordinátáit, ezek stabilitási tulajdonságait, valamint az $x(0)=[10 \ 20 \ 30]^T$ kezdeti feltételből induló állapottrajektóriáját.

Az állapotegyenlethez rendelhető hatásvázlat:



F17. ábra

A Lorenz egyenlet hatásvázlata

Jelen esetben a rendszer mozgását az állapotváltozók kezdeti értékei generálják, mivel az $u(t)$ gerjesztő jel az egyenletekben nem is szerepel. A *Lorenz* egyenletnek lényeges tulajdonsága, hogy az állapotterben három labilis egyensúlyi pontja van. Az egyensúlyi pontok koordinátáit meghatározó egyenletek:

$$\frac{dx_{10}}{dt} = f_1(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = 10(-x_{10} + x_{20}) = 0$$

$$\frac{dx_{20}}{dt} = f_2(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = 28x_{10} - x_{20} - x_{10}x_{30} = 0$$

$$\frac{dx_{30}}{dt} = f_3(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = x_{10}x_{20} - \frac{8}{3}x_{30} = 0$$

Ezekből meghatározhatók az egyensúlyi pontok koordinátáinak számértékei: ($\mathbf{P}_{L1}$): (0,0,0), ($\mathbf{P}_{L2}$): ($6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27$), ($\mathbf{P}_{L3}$): ($-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27$). Az egyensúlyi pontokban linearizált harmadrendű rendszer állapotmátrixa:

$$A_P = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_P & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_P & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right|_P & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right|_P & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right|_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - x_{3P} & -1 & -x_{1P} \\ x_{2P} & x_{1P} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Az A_P állapotmátrix sajátértékei a három különböző munkapontban:

$\mathbf{P}_\infty (x_{10}, x_{20}, x_{30})$	λ_1	λ_2	λ_3	A munkapont típusa
(0,0,0)	-22.83	11.83	-2.67	Labilis ($\mathbf{P}_{L1}$)
($6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27$)	-13.85	0.09+10.2j	0.09-10.2j	Labilis ($\mathbf{P}_{L2}$)
($-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27$)	-13.85	0.09+10.2j	0.09-10.2j	Labilis ($\mathbf{P}_{L3}$)

Miután mindhárom egyensúlyi pont labilis, az e pontok környezetéből indított mozgások ezt a környezetet általában elhagyják. A (0,0,0) koordinátákkal rendelkező kezdeti feltételek által indított mozgás az állapotter origójában marad, illetve az $x_1(0)=x_2(0)=0$, $x_3(0) \neq 0$ pontból indított mozgás az állapotter origójába tart. Ez az

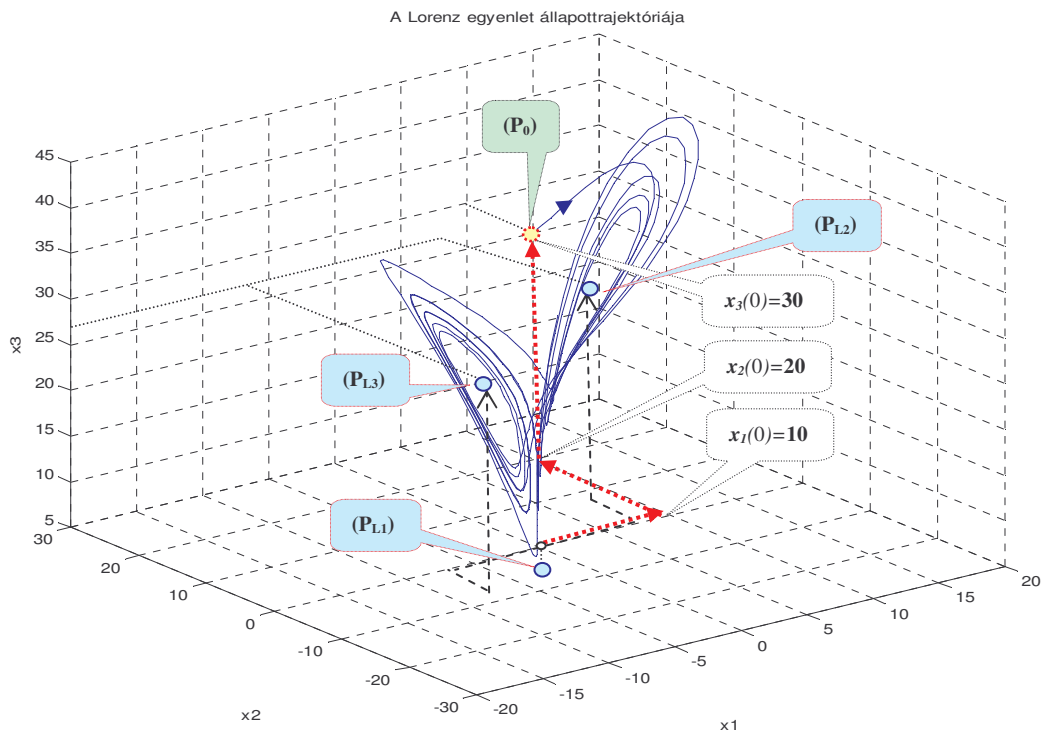
állapotegyenletekből, vagy a hatásvázlatból közvetlenül kiolvasható, hiszen ekkor az $x_1(t)$, és $x_2(t)$ állapotváltozókat előállító integrátorok „elindulni nem képesek”, az $x_3(t)$ állapotváltozó pedig ekkor a többi állapotváltozóra hatása nincs. Ezen túlmenően az $x_3(t)$ is a zérus felé tart, mivel az x_3 állapotváltozó integrátora *negatíván visszacsatolt*. Minden más kezdeti feltétel esetében minden integrátor bemenetén zérustól különböző jel van, ezért ilyen esetben a rendszer mozgásba jön. A rendszer viselkedése a labilis egyensúlyi pontok ellenére olyan, hogy a tetszőleges $x(0)$ kezdeti feltételekből induló mozgást leíró állapot trajektória – miközben a t idő a $0 < t < \infty$ időintervallumban változik – egy olyan *szabálytalan térgörbe, amely nem fut be egyik egyensúlyi pontba sem, sohasem ismétli önmagát, de a rendszer teljes „életfolyamata” alatt az állapottér egy meghatározott véges tartományát sem hagyja el*. Ennek az állapotegyenletnek a vizsgálata a káoszelmélet megalapozását eredményezte. Az állapotegyenlet megoldása, és a trajektória számítása:

```

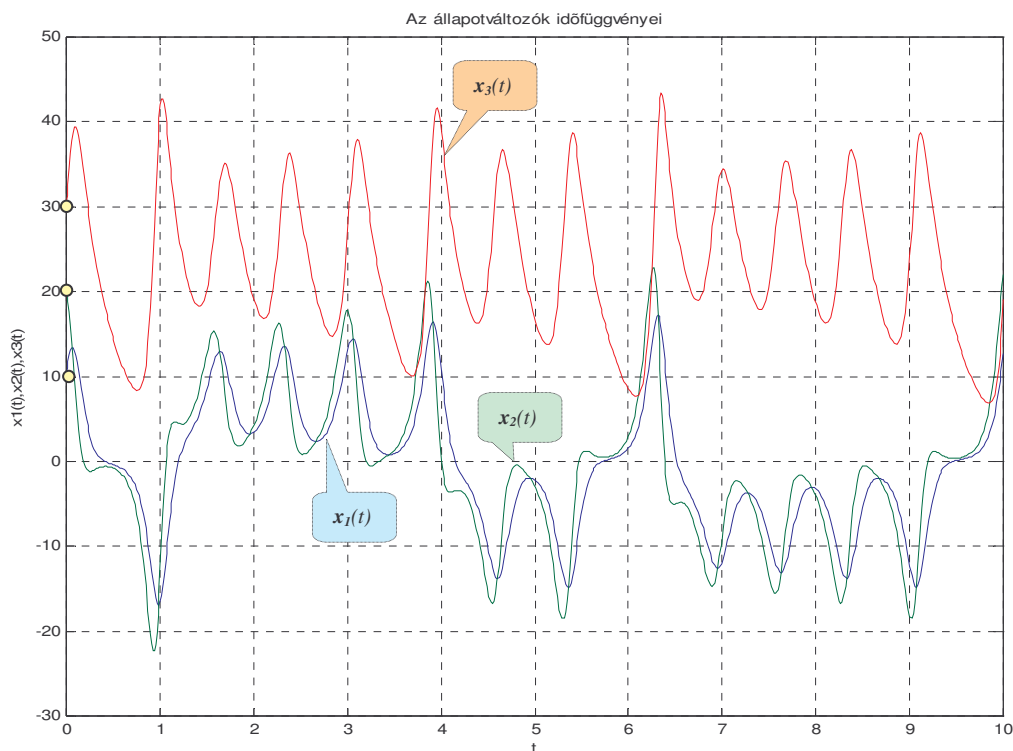
t0=0;tv=10;xo=[10 20 30]';
tv=input('tv=');xo=input('xo=');
[t,x]=ode45('lorenz1',[t0 tv]',xo);
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));grid;
title('A Lorenz egyenlet állapottrajektóriája');
xlabel('x1');ylabel('x2');zlabel('x3');pause;
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
title('Az állapotváltozók időfüggvényei');
xlabel('t');ylabel('x1(t),x2(t),x3(t)');grid;

% A lorenz1.m fájl
function x1=lorenz1(t,x)
x1(1)=10*(x(2)-x(1));
x1(2)=-x(1).*x(3)+28*x(1)-x(2);
x1(3)=x(1).*x(2)-8*x(3)/3;
x1=x1';

```



F18. ábra
Az $x(0)=[10 \ 20 \ 30]^T$ kezdeti feltételek által generált állapottrajektória



F19. ábra

Az $x(0)=[10 \ 20 \ 30]^T$ kezdeti feltételek által generált állapotváltozók időfüggvényei

F4. Lineáris rendszer

Ha $f(x,u)=Ax(t)+Bu(t)$ és $g(x,u)=Cx(t)+Du(t)$ a rendszer lineáris, és A , B , C , és D a rendszer **paramétermátrixai**. Ilyenkor az állandó u_0 hatására **egyetlen egyensúlyi pont**¹⁰⁴ jöhet létre, amelynek állapotkoordinátái az $Ax_0+Bu_0=0$ egyenletből $x_0=-A^{-1}Bu_0$, illetve a kimenőjel állandósult értéke $y_0=Cx_0+Du_0=(-CA^{-1}B+D)u_0$. A **lineáris rendszer egyensúlyi pontja stabilis, ha A állapotmátrixának minden sajátértéke negatív valós részü szám**¹⁰⁵. Ha ez fennáll, a sajátmozgás az állapottér origójába, a gerjesztett mozgás pedig a rendszer egyetlen stabilis x_0 egyensúlyi pontjába tart. A **lineáris rendszer** különleges jelentőséggel bír, mivel egységes, jól kidolgozott **rendszerelmélete** van. Ha lineáris rendszer gerjesztése $u(t)$, állapotváltozójának kezdeti értéke $x(0)$, akkor az állapotegyenletnek van analitikus megoldása¹⁰⁶:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

A lineáris rendszerre érvényes a **szuperpozíció elve**. Ennek értelmében, ha az u_1 -re y_1 válasz, és u_2 -re y_2 válasz keletkezik, akkor az $u=k_1u_1+k_2u_2$ gerjesztésre létrejövő válasz $y=k_1y_1+k_2y_2$ (k_1 , k_2 állandók). A szuperpozíció elvének érvénye a lineáris rendszerek elméletében igen nagy jelentőségű, a rendszer analízisét jelentősen elősegíti. Ha például az u gerjesztés a *Fourier* felbontással harmonikus jelek összegeként előállítható, akkor az egyes harmonikus komponensekre adott részválaszok összege lesz az u -ra vonatkozó y válasz, stb.¹⁰⁷ A lineáris rendszerek analízisét jelentős mértékben egyszerűsíti, hogy a különféle integrál transzformációk (a *Fourier*-, illetve a *Laplace* transzformáció) alkalmazása a differenciálegyenleteket algebrai egyenletekké

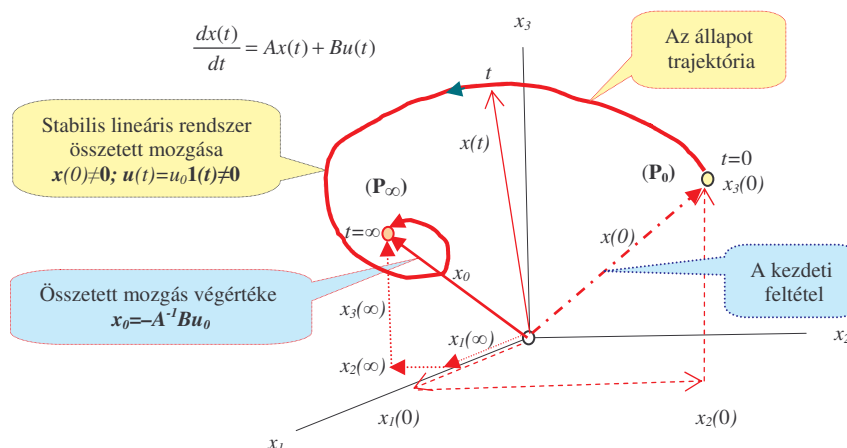
¹⁰⁴ Másodrendű rendszer esetében például az $f_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+u_1$, és az $f_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+u_2$ függvények az x_1 - x_2 állapotsíkon egyenesek, és ezek – ha A nem szinguláris – egy pontban metszhetik egymást.

¹⁰⁵ Lásd az átviteli függvény párhuzamos felbontását.

¹⁰⁶ A megoldó képlet levezetésének egy módszerét az 1.2 fejezetben találjuk. A lineáris rendszer állapotegyenletének analitikus megoldását a **MATLAB** `lsim`, `initial`, `step`, `impulse` függvényei támogatják.

¹⁰⁷ Ha a lineáris rendszer $u(t)=1(t)$ gerjesztésre vonatkozó válasza az $y(t)=v(t)$ átmeneti függvény, akkor egy tetszőleges, $\Delta u(t-\tau)$ ugrásjelek szuperpozíciójából felépülő $u(t)$ -re vonatkozó válasz a $\Delta v(t-\tau)$ részválaszok összegéből építhető fel (*Duhamel* integrál).

egyszerűsíti. A lineáris rendszerelmélet eredményei a nemlineáris rendszerek analízisében is – a munkaponti linearizálás lehetőségének alkalmazásával – felhasználhatók.



F20. ábra

Az összetett mozgás szemléltetése a stabilis lineáris rendszer állapotterében

Példa

Harmadrendű lineáris rendszer állapotegyenlete:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, u) = -0.2x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, u) = -2x_1(t) - 0.2x_2(t) + u(t)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3, u) = -0.25x_3(t) + u(t)$$

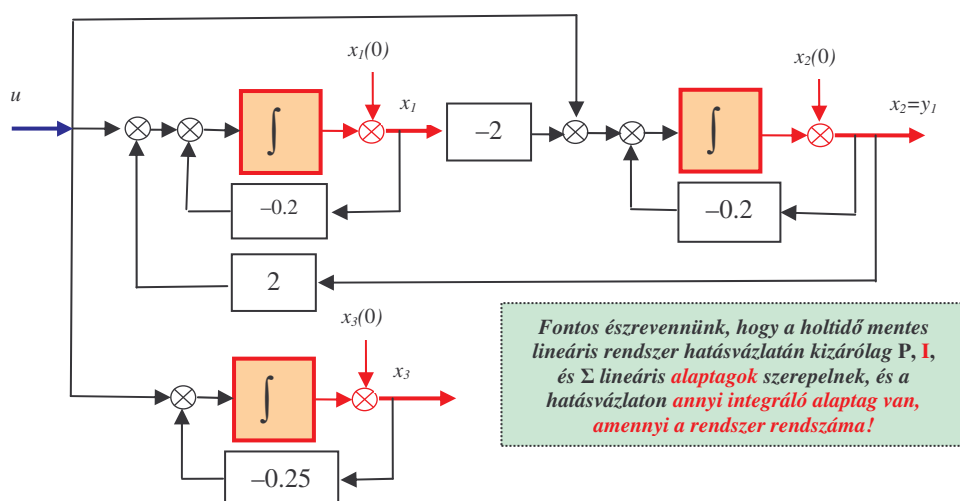
$$y(t) = x_1(t)$$

Adjuk meg a rendszer lineáris alaptagokból felépített hatásvázlatát. Az $u(t)=1(t)$ gerjesztés, és $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=1$ kezdeti feltételek mellett számítsuk ki a rendszer sajátmozgását, a gerjesztett mozgását, és az összetett mozgását. Ábrázoljuk a különféle mozgások állapottrajektóriáit.

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a $dx_1(t)/dt$, és a $dx_2(t)/dt$ állapotsebességek kizárólag az $x_1(t)$ és $x_2(t)$ állapotváltozóktól és az $u(t)$ gerjesztő jeltől, a $dx_3(t)/dt$ pedig csak az $x_3(t)$ -tól és az $u(t)$ -tól függenek. A lineáris dinamikus rendszernek három állapotváltozója, egy bemenő jele, és egy kimenő jele van.

A rendszer hatásvázlata az állapotegyenletének az alapján:



F21. ábra

A lineáris rendszer hatásvázlata

A rendszer paramétermátrixai az állapotegyenletek alapján:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 2 & 0 \\ -2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = 0$$

Az egyensúlyi helyzetben $dx/dt = Ax(\infty) + Bu_0 = 0$, és innen $x(\infty) = -A^{-1}Bu_0$. Részletezve:

$$x(\infty) = -A^{-1}Bu = -\begin{bmatrix} -0.2 & 2 & 0 \\ -2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.0495 & -0.495 & 0 \\ 0.495 & -0.0495 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5446 \\ -0.4455 \\ 4.0000 \end{bmatrix}$$

A rendszer karakterisztikus egyenlete, és állapotmátrixának sajátértékei¹⁰⁸:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 0.2 & -2 & 0 \\ 2 & \lambda + 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 0.25 \end{bmatrix} = (\lambda + 0.2)^2(\lambda + 0.25) + 4(\lambda + 0.25) =$$

$$= \lambda^3 + 0.65\lambda^2 + 4.14\lambda + 1.01 = 0$$

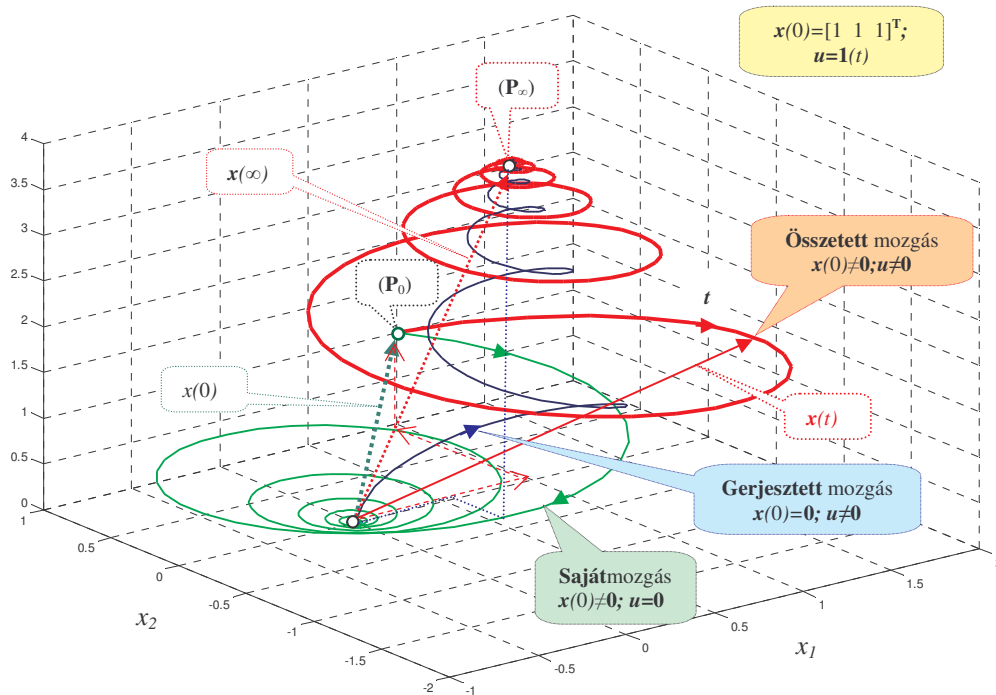
$$\lambda_{1,2} = -0.2 \pm 2j, \quad \lambda_3 = -0.25$$

Miután az A állapotmátrix minden sajátértéke negatív valós részű, a rendszer aszimptotikusan stabilis. Az egyensúlyi helyzetben az állapotsebességek zérusok, ezért (P_∞) az $x(\infty)$ koordinátákkal rendelkező **stabilis egyensúlyi pont**. A trajektóriákat **MATLAB** támogatással számítjuk.

```
A=[-0.2 2 0;-2 -0.2 0;0 0 -0.25];B=[1 1 1]';C=[1 0 0];D=0;xo=[1 1 1]';u=1;
disp(poly(A));disp(eig(A));disp(-inv(A)*B*u);pause;sys=ss(A,B,C,D);tv=10;
[y,t,x]=initial(sys,xo,tv);plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));grid;
title('A rendszer sajátmozgása');xlabel('x1');ylabel('x2');zlabel('x3');
pause;hold;
[y,t,x]=step(sys);plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));
title('A rendszer saját,és gerjesztett mozgása');pause;
u=ones(1,length(t));[y,t,x]=lsim(sys,u',t,xo);plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));
title('A rendszer saját-, gerjesztett-, és összetett mozgása');
pause;clf;
```

A számításoknak az állapottérben megjelenített eredményeit a következő ábra foglalja össze. Láthatóan az aszimptotikusan stabilis lineáris rendszer **sajátmozgása** az állapottér (P_0) pontjából indulva az origóba-, a **gerjesztett mozgás** az origóból a (P_∞) egyensúlyi pontba-, az **összetett mozgás** pedig a (P_0) pontból a (P_∞) pontba tart.

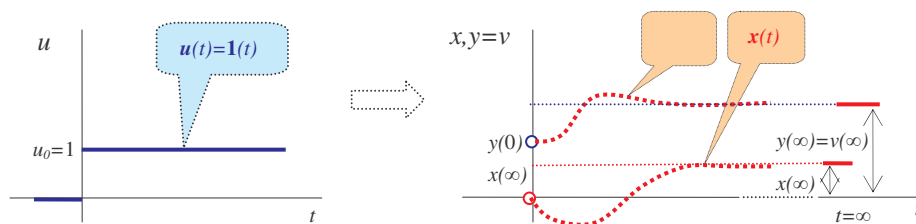
¹⁰⁸ A lineáris rendszer állapotmátrixának sajátértékei nem függenek a rendszer egyensúlyi pontjának koordinátáitól!



F22. ábra

Stabilis lineáris rendszer különféle mozgása az állapottérben

A stabilitás szemléletesen köthető ahhoz az egyszerű tulajdonsághoz is, hogy a dinamikus rendszer rendelkezik-e azzal az elvárható működésmóddal, hogy $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ belépő vizsgálójellel gerjesztve, képes-e olyan állapotot elérni, mikor is $t \rightarrow \infty$ mellett az x állapotváltozók is, és az y kimenő jelek is egy $x_0=x(\infty)=\text{állandó}$, $y_0=y(\infty)=\text{állandó}$ értékekhez tartanak. Ha a dinamikus rendszer az állandó u_0 bemenő jelle, állandósult állapotban, állandó x_0 állapotváltozóval-, és állandó y_0 kimenő jellel válaszol, akkor a rendszer **aszimptotikusan stabilis és önbeálló**. $x(0)=0$ kezdeti feltételek mellett az $u(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrásra adott $y(t)=v(t)$ választ **átmeneti függvénynek** hívjuk. A stabilis rendszer átmeneti függvénye $t \rightarrow \infty$ mellett egy állandó értékhez tart.



F23. ábra

Az $u(t)=\mathbf{1}(t)$ -re adott $x(t)$ és $y(t)=v(t)$ válaszok, stabilis rendszer mellett

Az n -ed rendű rendszer bemenő jeleinek száma j , kimenő jeleinek száma k , és általános esetben mindegyik bemenő jel mindegyik állapotváltozóra-, és mindegyik kimenő jelle befolyást gyakorolhat. Ekkor a rendszernek $k \times j$ számú átmeneti függvénye van, és a stabilitás biztosításához – a rendszert $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ belépő jellel gerjesztve – mindegyik $x(t)$ és $y(t)$ időfüggvénynek állandó értékhez kell tartania.

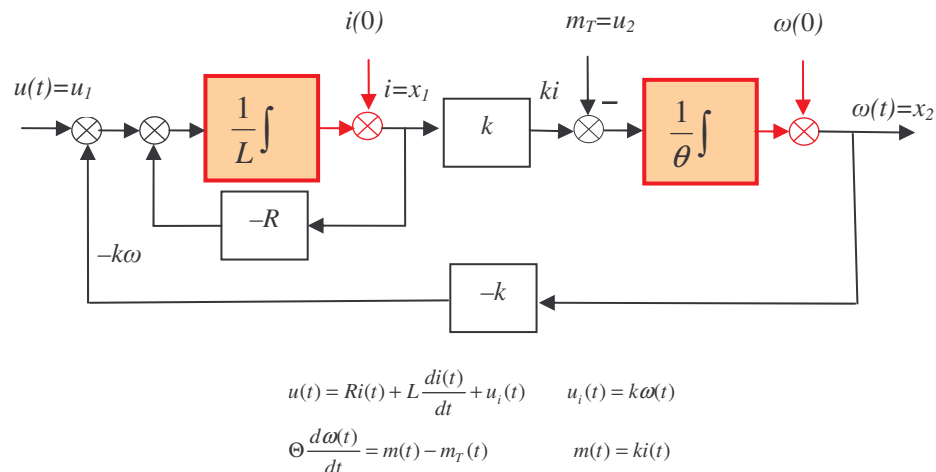
Megjegyzés.

A tartályokból álló folyamat stabilitása (önbeállósága) a fizikai működésből közvetlenül is megállapítható. Az u_{10} , u_{20} beáramló hozamok olyan $x_{10}=y_{10}$ szinthez vezetnek, amely szinthez az általánosított q_{10} hozam akkora, mint a beáramló hozamok összege. Az alsó tartályra hasonlóan az u_{30} és q_{10} hozamok akkora $x_{20}=y_{20}$ szinthez vezetnek, amelynél a q_{20} kiáramló hozam azonos az u_{30} és q_{10} beáramló hozamok összegével. Mindezekből pedig az is következik, hogy az állandó u_0 gerjesztésekre kialakulnak az $y=x$ kimenő jelek, és állapotváltozók állandó $y_0=x_0$ értékei, vagyis a folyamat aszimptotikusan stabilis, önbeálló.

Hasonlóan stabilis és önbeálló tulajdonságú az RLC áramkör is, mivel az állandó u_0 bemenő feszültség hatására, állandósult állapotban, a kimenő jel a bemenő jellel azonos állandó értéket vesz fel, a kondenzátort az i áram az u_0 feszültségre tölti fel: $y_0 = u_0$.

Nem rendelkezik önbeálló tulajdonsággal a hidraulikus erősítő és szervomotor, mivel az állandó u_0 hatására az y kimenő jele időben lineárisan nő (integráló tag).

A fizikai működésből kiolvasható az elektromechanikai rendszer önbeállósága is, mivel az állandó u_0 , m_{T0} , u_{g0} bemenő jelek hatására bizonyosan kialakulnak az állapotváltozóknak az i_0 , ω_0 , és i_{g0} egyensúlyi értékei. Figyelembeveendő viszont a rendszer azon tulajdonsága, hogy az u_{g0} **gerjesztő feszültségnek zérus értéket megengedni nem lehet**, mivel ez zérus gerjesztő áramot, illetve a remanenciából visszamaradó, közel zérus φ_0 fluxust eredményezne. Ilyen esetben a terheletlen gép u_0 kapocsfeszültsége, és az $u_{i0} = c\varphi_0\omega_0$ indukált feszültsége azonos, ami csak – a kis fluxus miatt – igen nagy szögsebesség mellett jöhetne létre (a motor zérus gerjesztő áram mellett „megszalad”). Mindezek miatt a gerjesztő áramot a névleges értékének harmada alá csökkenteni nem szabad. Itt jegyezzük meg, hogy abban az esetben, ha a gép gerjesztő árama állandó (vagy a gerjesztő fluxust egy állandó mágnes hozza létre) a gép matematikai modellje másodrendű lineáris modellre egyszerűsödik.



F23. ábra

Állandó gerjesztésű egyenáramú motor hatásvázlata és lineáris matematikai modellje

Az egyenletekben, illetve a hatásvázlaton szereplő k gépállandó azonos az indukált feszültség kifejezésében, illetve a nyomatékegyenletben. Ez abból látható, hogy a $P_L = u_{io}i_o = c_1\varphi_o\omega_o i_o = k_1\omega_o i_o$ légrés teljesítmény alakul át $P_L = m_o\omega_o = c_2\varphi_o i_o \omega_o = k_2\omega_o i_o$ mechanikai teljesítménnyé, amiből következik, hogy $c_1\varphi_o = k_1 = c_2\varphi_o = k_2$ és $c_1 = c_2 = c$, illetve $k_1 = k_2 = k$.

Önbeálló, aszimptotikusan stabilis, és harmadrendű lineáris rendszer a termikus folyamat. A fizikai tulajdonságokból következik, hogy egy állandó villamos fűtés mellett szükségszerűen kialakulnak az állapotváltozók, illetve a kimenő jel állandósult értékei.

Nyomatékosan hangsúlyoznunk kell, – ami egyébként a rendszer $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$ állapotegyenletéből következik –, hogy a lineáris rendszernek adott, állandó u_0 gerjesztés mellett egyetlen egyensúlyi pontja lehet, ahol is az állapotsebesség zérus. Ebben az egyensúlyi pontban $Ax_0 + Bu_0 = 0$, illetve az állapotváltozó állandósult értéke $x_0 = -A^{-1}Bu_0$. Ez az egyensúlyi pont $u_0 = 0$ esetében az állapottér origója. Az x_0 koordinátákkal rendelkező egyensúlyi pont stabilis, ha a rendszer A állapotmátrixának minden sajátértékére $\text{real}(\lambda_i) < 0$, ($i=1,2, \dots, n$). Ha ez teljesül, akkor az állapottér tetszőleges pontjából indított sajátmozgás az állapottér origójába –, az $u_0 \mathbf{1}(t)$ hatására keletkező gerjesztett mozgás, pedig az állapottérnek az $x_0 = -A^{-1}Bu_0$ pontjába tart. Ha az állapotmátrixnak legalább egy sajátértéke zérus, vagy zérus valós részű, vagy pozitív, vagy pozitív valós részű, akkor a rendszer labilis. Ekkor a sajátmozgás valamelyik koordinátája „nem tűnik el”, periodikus lengőmozgást végez, vagy pedig minden határon túl növekszik. A lineáris rendszer egyensúlyi pontjának stabilitása nem függ az egyensúlyi pont koordinátáitól, illetve az u_0 bemenő jeltől. Mindezek miatt **a lineáris rendszer stabilitása (vagy labilitása) az A állapotmátrix sajátértékeivel egyértelműen meghatározott rendszerjellemző tulajdonság.¹⁰⁹**

A nemlineáris rendszer állapotegyenletének – néhány speciális tulajdonságokkal rendelkező $f(x,u)$ kivételével – általában csak numerikus megoldása van (például az Euler, vagy a Runge–Kutta eljárások). A nemlineáris rendszernek állandó u_0 gerjesztés mellett több egyensúlyi pontja is lehet, és ezek koordinátái az $f(x_0, u_0) = 0$ egyenletből számíthatók. Az egyensúlyi pont stabilis, vagy labilis tulajdonságait az adott egyensúlyi ponthoz rendelhető linearizált rendszer állapotmátrixának sajátértékei határozzák meg. Az egyensúlyi pontok stabilitása függ az egyensúlyi pontok koordinátáitól, és ezen keresztül a rendszer u_0 bemenő jelétől. A stabilitás ezért a nemlineáris rendszernek **nem rendszerjellemző tulajdonsága**. Miután az $f(x,u)$, és $g(x,u)$ függvények igen változatosak lehetnek, ezért a nemlineáris rendszereknek egységes rendszerelmélete sem létezik. A nemlineáris

¹⁰⁹ Az n,n méretű A állapotmátrix p sajátértékeinek meghatározása **MATLAB** függvénnyel: $[V, P] = \text{eig}(A)$; vagy $p = \text{roots}(\text{poly}(A))$

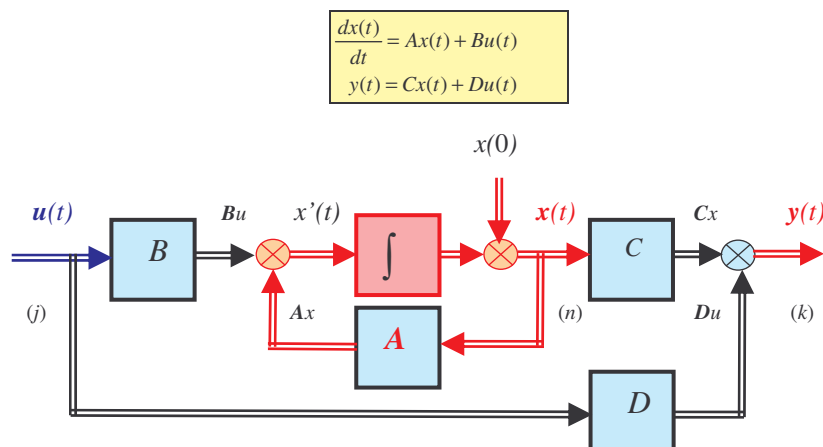
rendszerekre nem érvényes a szuperpozíció elve, és a differenciálegyenlet megoldására nem alkalmazhatóak az integrál transzformációs eljárások.

F5. Lineáris dinamikus rendszer állapotegyenlete.

Az állapotegyenlet analitikus megoldása

A dinamikus rendszerekben – így az irányítási folyamatokban is – időben lejátszódó események történnek, ezért az **u bemenő jelek** (a gerjesztések), az **x állapotváltozók**, és az **y kimenő jelek** (a válaszok) közötti függvénykapcsolatokat differenciálegyenletek írják le. Ezek általában egy *nemlineáris állapotegyenlet* alakjában öltenek testet, amelyet munkaponti linearizálással gyakran lineáris állapotegyenletté alakíthatunk, de az is lehetséges, hogy egy adott dinamikus rendszert eleve **lineáris állapotegyenlet** jellemez (pl. RLC hálózatok).

Lineáris, folytonos, n -ed rendű, **MIMO** (több bemenetű – több kimenetű) **dinamikus rendszer** állapotegyenlete, valamint az ehhez rendelhető hatásvázlat:



F24. ábra
Lineáris MIMO rendszer hatásvázlata

Az **LTI** rendszernek j számú u bemenő jele és k számú y kimenő jele van, az x állapotváltozók száma n . Ezért az **A állapotmátrix** mérete $n \times n$ (négyzetes mátrix), a **B bemeneti mátrix** mérete $n \times j$, a **C kimeneti mátrix** mérete $k \times n$, a **D direkt mátrix** mérete pedig $k \times j$. Ha az állapotegyenletben egy bemenő jel, egy kimenő jel, és n állapotváltozó szerepel, egy bemenetű – egy kimenetű, n -ed rendű **SISO** (Single Input, Single Output) rendszerről beszélünk ($j=1, k=1, n \geq 1$).

Az állapotegyenlettel leírt rendszer tulajdonságait szemlélteti a hozzá rendelt hatásvázlat. Az ezen szereplő téglalapok jelátviteli tagokat szimbolizálnak, és a bennük szereplő jelképek mutatják meg a közvetlen be-, és kimeneteik közötti függvénykapcsolatot. A nyilakkal ellátott vonalakkal ábrázoljuk az egymással **ok-okozati** kapcsolatban lévő jeleket, és a hatásirányt, a körök pedig olyan tagokat jelképeznek, amelyeknek kimenő jelei a bemenő jelek **összege**. A hatásvázlatból kiolvashatóan az **integráló tag** bemenetén működtetett $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$ bemenő jel (a $dx(t)/dt = x'(t)$ **állapotsebesség**) hatására az integráló tag kimenetén – az $x(0)$ kezdeti feltételt is figyelembe véve – x' integrálja (vagyis maga az x állapotváltozó) jön létre. A hatásvázlaton jól szemléltethető az **integráló tagnak az A állapotmátrixú algebrai taggal megvalósuló visszacsatolása**. Az A , B , C , D paramétermátrixokkal jellemzett tagok, és az összegző tagok **algebrai tagok**, aminek jelentése az, hogy közvetlen bemenő –, és kimenő jeleik között **időkésleltetés nélküli arányos függvénykapcsolat** van. Ezzel szemben az integráló tag a hatásvázlat **dinamikus tagja**, melynek kimenő jele a bemenő jelének idő szerinti integrálja. Ahhoz, hogy az integráló tag kimenetén a közvetlen bemenő jelének a hatása megjelenjen, **véges időnek** kell eltelnie. Mindezekből az is következik, hogy abban az esetben, ha az állapottér origójában lévő gerjesztetlen rendszert (amikor is $x(0)=0$ és $y(0)=0$) a gerjesztő jelek ugrásszerű hatása éri, akkor az y válasz a $t=0$ időpontban csak akkor „ugorhat”, ha $D \neq 0$. $D \neq 0$ esetében – mint ahogy ez a hatásvázlatból szemléletesen látható – az u gerjesztés nem csupán az állapotváltozókon keresztül, hanem egy $Du(t)$ komponenssel **direkt módon** is befolyásolja az y kimenő jelet. Az állapotegyenlet koordinátákban felírható alakja:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} (dx/dt; n \times 1) \\ \begin{bmatrix} dx_1(t)/dt \\ dx_2(t)/dt \\ \vdots \\ dx_n(t)/dt \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} (A; n \times n) \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} (x; n \times 1) \\ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} (B; n \times j) \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} (u; j \times 1) \\ \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 \\
 \begin{matrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix} \\ (y; k \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \\ (C; k \times n) \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ (x; n \times 1) \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kj} \end{bmatrix} \\ (D; k \times j) \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix} \\ (u; j \times 1) \end{matrix}
 \end{array}$$

A *Laplace* transzformáció alkalmazásával az állapotegyenletet az s operátor tartományban algebrai egyenletté alakíthatjuk, amit a transzformáció $L\{Ax(t)+Bu(t)\}=Ax(s)+Bu(s)$ linearitási tétele, és az $L\{dx(t)/dt\}=sx(s)-x(0)$ differenciálási szabálya tesz lehetővé. Ezért a t időtartományban felírt állapotegyenletet *Laplace* transzformálva kapjuk¹¹⁰:

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

innen a megoldás az s és t tartományban:

$$x(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)] = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)Bu(s)$$

$$y(s) = C\Phi(s)x(0) + [C\Phi(s)B + D]u(s)$$

$$\text{ahol: } \Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = L\{\exp(At)\}$$

$$x(t) = L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\{\Phi(s)x(0) + \Phi(s)Bu(s)\} = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = Cx(t) + Du(t)$$

Ha az állapotváltozók $x(0)$ kezdeti feltételei zérusok, akkor:

$$\begin{array}{l}
 y(s) = [C\Phi(s)B + D]u(s) = W(s)u(s) \\
 W(s) = C\Phi(s)B + D = \frac{\text{Cadj}(sI - A)B + \det(sI - A)D}{\det(sI - A)}
 \end{array}$$

A **$W(s)$ átviteli mátrix** a j számú bemenő jel, és a k számú kimenő jel között – az s operátor tartományban – mátrixegyenlet formájában teremt kapcsolatot:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_i(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1l}(s) & \dots & W_{1j}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{i1}(s) & \dots & W_{il}(s) & \dots & W_{ij}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{k1}(s) & \dots & W_{kl}(s) & \dots & W_{kj}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_l(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

A kifejezésben $k \times j$ darab **átviteli függvény** szerepel. Általános esetben bármelyik kimenő jelet a bemenő jelek mindegyike befolyásolhatja. Az átviteli mátrixban szereplő mindegyik átviteli függvénynek közös tulajdonsága, hogy az s *Laplace* operátornak algebrai törtjét alkotják, és mindegyiknek a nevezője ugyanaz a $\det(sI - A)$ n -ed fokú **karakterisztikus** polinom.

Egy másodrendű lineáris **SI**SO rendszer esetében például egy lehetséges állapotegyenlet:

¹¹⁰ $x(s) = L\{x(t)\}$; $u(s) = L\{u(t)\}$; $y(s) = L\{y(t)\}$; $L\{\exp(At)\} = \Phi(s)$. $\Phi(s)$ a **$\Phi(t) = \exp(At)$ alaplármátrix** *Laplace* transzformáltja. Az állapotegyenlet $sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$ transzformáltjának $x(s)$ -re történő rendezésénél figyelembe kell venni, hogy mátrixműveletekről van szó. Ezért $sx(s) - Ax(s) = x(0) + Bu(s) \rightarrow (sI - A)x(s) = x(0) + Bu(s) \rightarrow (sI - A)^{-1}(sI - A)x(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)] \rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)]$.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}u_1(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \\
y_1(t) &= c_{11}x_1(t)
\end{aligned}$$

vagy mátrixegyenlet alakban:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = u_1(t) \quad y(t) = y_1(t) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

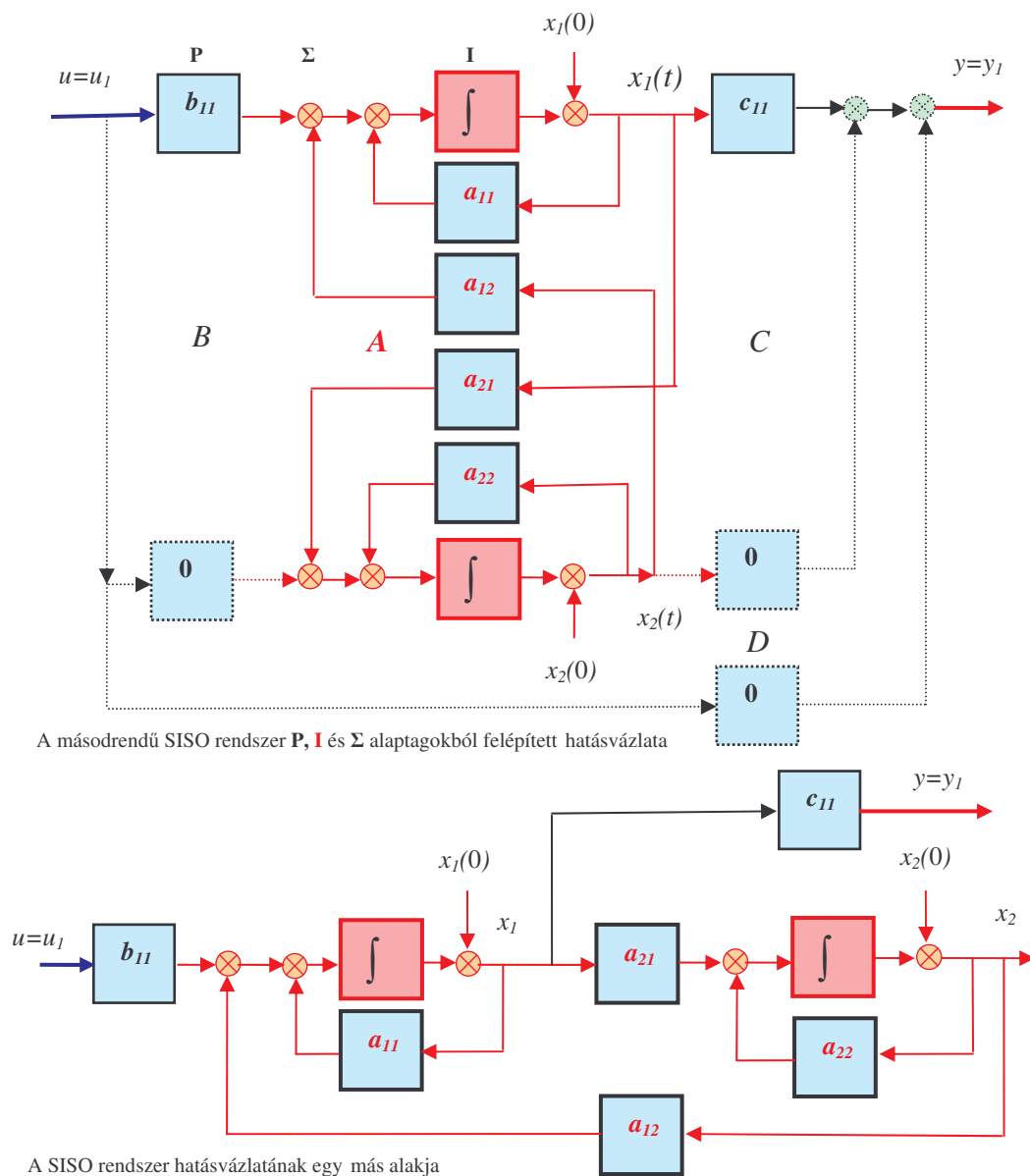
$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

A **SISO** tag átviteli mátrixa egyetlen $W(s)$ **átviteli függvényre** egyszerűsödik. Az átviteli függvény alakja ekkor:

$$\begin{aligned}
W(s) &= \frac{y_1(s)}{u_1(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{c_{11}(s - a_{22})b_{11}}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = k \frac{1 + \tau s}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2} \\
k &= \frac{c_{11}b_{11}(-a_{22})}{\det(A)} \quad \tau = \frac{1}{(-a_{22})} \quad T = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \quad \xi = -\frac{\text{tr}(A)}{2\sqrt{\det(A)}}
\end{aligned}$$

A lineáris **SISO** rendszer jelátviteli tulajdonságai olyan hatásvázlattal is szemléltethetők, amelyben kizárólag **P** (*arányos*), **I** (*integráló*) és **Σ** (*összegző*) **alaptagok**¹¹¹ szerepelnek. A tárgyalt példa adataival az alaptagokból felépített struktúra:

¹¹¹ A lineáris **P** ($y(t)=ku(t)$), **I** ($y=y(0)+\int u(t)dt$) és **Σ** ($y(t)=\Sigma u_i(t)$) alaptagok segítségével az általános lineáris **MIMO** rendszer hatásvázlata is felépíthető. Ez a hatásvázlat koordinátáinként jeleníti meg a rendszer u bemenő-, y kimenő jeleit és az x állapotváltozóit. Az állapotkoordináták által létesített tér az állapot tér.

A másodrendű SISO rendszer P , I és Σ alaptagokból felépített hatásvázlata

A SISO rendszer hatásvázlatának egy más alakja

F25. ábra
Másodrendű SISO rendszer hatásvázlata

Figyeljük meg, hogy a rendszer hatásvázlatán **annyi integráló tag szerepel, amennyi az állapotváltozók száma**, az integráló tagok kimenő jelei az állapotváltozók, és ezek az integrátorok egyrészt önmagukról (a_{11} , a_{22}), másrészt a másik integráló tagról (a_{12} , a_{21}) visszacsatoltak. Azt is fontos észrevenni, hogy ezek a csatolások az A állapotmátrix elemein keresztül jönnek létre, ami az állapotmátrix kitüntetett szerepére utal. Ha a állapotmátrix elemei nem zérusok, akkor a jelek zárt hurkot alkotó hatásláncban terjednek. A rendszer stabilitásának szempontjából ennek fontos következményei¹¹² vannak. A hatásvázlat utóbbi alakjából a SISO tag $W(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvénye – mellőzve a bonyolult $C(sI-A)^{-1}B+D$ mátrixműveleteket – egyszerűen felírható. Az átviteli függvény a hatásvázlat alapján:

¹¹² Az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer aszimptotikusan stabilis, ha A állapotmátrixának minden λ_i sajátértéke ($i: 1, 2, \dots, n$) negatív, vagy negatív valós részű szám.

$$\begin{aligned}
 y(s) = c_{11}x_1(s) &= c_{11}b_{11} \frac{\frac{1}{s}}{1 - a_{11}\frac{1}{s}} u(s) = c_{11}b_{11} \frac{1}{s - a_{11}} u(s) \\
 &= c_{11}b_{11} \frac{1}{1 - \frac{s}{a_{11}} \frac{1}{s}} \frac{1}{1 - a_{22}\frac{1}{s}} \frac{1}{1 - \frac{a_{12}a_{21}}{(s - a_{11})(s - a_{22})}} u(s) \\
 W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D &= \frac{y(s)}{u(s)} = c_{11}b_{11} \frac{s - a_{22}}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \\
 &= \frac{c_{11}(s - a_{22})b_{11}}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
 \end{aligned}$$

F6. Az állapotegyenlet normalizálása

(Amplitúdó -, és idő léptékezés)

Az állapotegyenletekben minden u *bemenő jel*, minden x *állapotváltozó* és minden y *kimenő jel* **dimenzióval** rendelkező különféle fizikai mennyiség, (például: erő [**N**], elmozdulás [**m**], sebesség [**m/sec**], nyomaték [**Nm**], szögsebesség [**rad/sec**], villamos feszültség [**Volt**], villamos áram [**Amper**], anyagáram [**m³/sec**], nyomás [**N/m²**], hőmérséklet [**°C**], stb) a t idő dimenziója pedig **secundum**. Ebből az is következik, hogy az A , B , C és D paramétermátrixokban is különféle dimenzióval rendelkező számok szerepelnek. Az A állapotmátrix főátlójában lévő a_{11} és a_{22} stb. számoknak azonban mindegyike **sec⁻¹** dimenzióval rendelkezik, ami abból is látható, hogy $\dim[dx_i/dt] = \dim[a_{ij}x_j] \rightarrow \dim[x_i]/\text{sec} = \dim[a_{ij}]\dim[x_j] \rightarrow \dim[a_{ij}] = \text{sec}^{-1}$.

A másodrendű SISO rendszer esetében legyenek az u_i , x_i , x_2 és y_i fizikai mennyiségek viszonyítási alapegységei U_{10} , X_{10} , X_{20} , Y_{10} , a t idő normalizált alapegysége pedig T_0 . A koordinátákban felírt állapotegyenlet azonos átalakításával kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \frac{x_1}{X_{10}}}{d \frac{t}{T_0}} \frac{X_{10}}{X_{10}} &= a_{11} \frac{x_1}{X_{10}} \frac{X_{10}}{X_{10}} + a_{12} \frac{x_2}{X_{20}} \frac{X_{20}}{X_{20}} + b_{11} \frac{u_1}{U_{10}} \frac{U_{10}}{U_{10}} \\
 \frac{d \frac{x_2}{X_{20}}}{d \frac{t}{T_0}} \frac{X_{20}}{X_{20}} &= a_{21} \frac{x_1}{X_{10}} \frac{X_{10}}{X_{10}} + a_{22} \frac{x_2}{X_{20}} \frac{X_{20}}{X_{20}} \\
 \frac{y_1}{Y_{10}} \frac{Y_{10}}{Y_{10}} &= c_{11} \frac{x_1}{X_{10}} \frac{X_{10}}{X_{10}}
 \end{aligned}$$

Vezessük be az $u_i/U_{10} = u_i^*$, $x_i/X_{10} = x_i^*$, $y_i/Y_{10} = y_i^*$ jelölésekkel a fizikai változók dimenziótlan **relatív értékeit** (amplitúdó léptékezés), és $t^* = t/T_0$ jelöléssel pedig a dimenziótlan **relatív időt** (időléptékezés). Ezekkel az állapotegyenlet relatív mennyiségekkel felírható alakja:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt^*} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}T_0 & a_{12}T_0 \frac{X_{20}}{X_{10}} \\ a_{21}T_0 \frac{X_{10}}{X_{20}} & a_{22}T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}T_0 \frac{U_{10}}{X_{10}} \\ 0 \end{bmatrix} u_1^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^* \\ 0 \end{bmatrix} u_1^* \\
 y_1^* &= c_{11} \frac{X_{10}}{Y_{10}} x_1^* = c_{11}^* x_1^*
 \end{aligned}$$

Az állapotegyenlet eme alakjában minden (*) felső indexel jelölt u^* , x^* , és y^* relatív fizikai változók és a t^* relatív idő dimenziótlanok, és dimenziótlanok a paramétermátrixok (*) felső indexel rendelkező mátrixelemei is.

A jelek U_{10} , X_{10} , X_{20} és Y_{10} viszonyítási alapértékeit úgy célszerű megválasztani, hogy az u_i^* , x_i^* , x_2^* és y_i^* relatív értékű jelek megfelelő nagyságrendben legyenek (pl.: $-1 < x_i^*(t^*) < 1$ stb). A T_0 időalapot a dinamikus rendszer időállandóihoz célszerű igazítani (1 msec=10⁻³ sec, 1 sec, 1 perc=60 sec, 1 óra=3600 sec stb). Ha a normalizálatlan rendszer jelei például $u_i = u$ [**Volt**], $x_1 = i$ [**Amper**], $x_2 = \omega$ [**rad/sec**], $y_1 = v$ [**m/sec**], és az idő t [**sec**], akkor **MKS** mértérendszerben alapértékeknek $U_{10} = 1$ Volt, $X_{10} = 1$ Amper, $X_{20} = 1$ rad/sec, $Y_{10} = 1$ m/sec, $T_0 = 1$ sec is választható. Ekkor a normalizált-, és a normalizálatlan rendszer paramétermátrixai azonos számértékeket tartalmaznak, de a jelek-, és a paraméterek dimenziótlanoknak tekinthetők.

Vegyük észre, hogy a normalizált rendszer karakterisztikus polinomja:

$$\det(\lambda I - A^*) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}T_0 & a_{12}T_0 \frac{X_{20}}{X_{10}} \\ a_{21}T_0 \frac{X_{10}}{X_{20}} & a_{22}T_0 \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11}T_0)(\lambda - a_{22}T_0) - a_{12}a_{21}T_0^2 \frac{X_{20}X_{10}}{X_{10}X_{20}} =$$

$$= \lambda^2 - T_0(a_{11} + a_{22})\lambda + T_0^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - T_0 \text{tr}(A)\lambda + T_0^2 \det(A)$$

Ennek gyökei $T_0=1$ sec normalizálás mellett azonosak az eredeti (normalizálatlan) rendszer karakterisztikus egyenletének gyökeivel, ami azt jelenti, hogy **az amplitúdó léptékezés** – szemben az időléptékezéssel – **a rendszer pólusait nem változtatja meg**. Az elméleti jellegű analízisben általában – a (*) felső index elhagyása mellett – a normalizált állapotegyenletekkel dolgozunk.

A normalizálást a $W(s)$ átviteli függvényen is végrehajthatjuk, ekkor azonban csak az u és y jeleket és az s Laplace operátort normalizálhatjuk, mivel az átviteli függvény alakban az állapotváltozók „rejtve” vannak. Például a korábban felírt másodrendű rendszer esetében $\dim[k]=\dim[y_I]/\dim[u_I]$, $\dim[\tau]=\dim[T]=\text{sec}$, $\dim[s]=\text{sec}^{-1}$.

$$W(s) = \frac{y_I(s)}{u_I(s)} = \frac{\frac{y_I}{Y_{10}}}{\frac{u_I}{U_{10}}} = k \frac{1 + \frac{\tau}{T_0}T_0s}{1 + 2\xi \frac{T}{T_0}T_0s + (\frac{T}{T_0})^2(T_0s)^2}$$

$$W(s^*) = \frac{y_I^*(s^*)}{u_I^*(s^*)} = k^* \frac{1 + \tau^*s^*}{1 + 2\xi T^*s^* + T^{*2}s^{*2}}$$

$$u_I^* = \frac{u_I}{U_{10}} \quad y_I^* = \frac{y_I}{Y_{10}} \quad k^* = k \frac{U_{10}}{Y_{10}} \quad \tau^* = \frac{\tau}{T_0} \quad T^* = \frac{T}{T_0} \quad s^* = sT_0$$

A normalizált átviteli függvény y_I^* , x_I^* , jelei, a k^* , τ^* , T^* paraméterei és az s^* változója dimenziótlanok. Az elméleti jellegű vizsgálatokban – a (*) felső index elhagyása mellett – általában a normalizált átviteli függvényekkel dolgozunk.

F7. Elsőrendű lineáris SISO rendszer

Az elsőrendű rendszer jelentősége nem csupán abban van, hogy igen egyszerűen kezelhető a matematikai modell. Ha az állapotmátrix mérete $n>1$, akkor az eseteknek egy jelentős részében – nevezetesen akkor, ha A minden sajátértéke egymástól különböző – az eredeti rendszeren egy $x_T = Tx$ koordináta transzformációval¹¹³ átalakítást lehet végrehajtani. Figyelembe véve, hogy $x = T^{-1}x_T$, az átalakított rendszer állapotegyenlete

$$T^{-1}dx_T(t)/dt = AT^{-1}x_T(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = CT^{-1}x_T(t) + Du(t)$$

$$dx_T(t)/dt = TAT^{-1}x_T(t) + TBu(t) = A_Tx_T(t) + B_Tu(t),$$

$$y(t) = CT^{-1}x_T(t) + Du(t) = C_Tx_T(t) + D_Tu(t)$$

Ennek eredményeként – alkalmasan megválasztott T transzformációs mátrix mellett – az átalakított rendszer $A_T = TAT^{-1}$ állapotmátrixa **diagonális mátrixként**¹¹⁴ jelenhet meg (kanonikus állapottranszformáció)¹¹⁵. A transzformációval (az u bemenő-, és az y kimenő jel közötti kapcsolat változatlansága mellett) kapható A_T diagonális állapotmátrix **az állapotváltozókat egymástól mintegy szétcsatolja**, aminek jelentése az, hogy a transzformált rendszer integráló tagjai kizárólag önmagukról visszacsatoltak. Ekkor a transzformált rendszer n számú, egymástól szétcsatolt, elsőrendű rendszerre „esik szét”, vagyis ha az elsőrendű rendszert minden vonatkozásában ismerjük, akkor a magasabb rendű rendszerek egy jelentős osztályát is egyszerűen kezelhetjük (lásd az átviteli függvény párhuzamos felbontását). Ilyen esetben a $\Phi_T(t) = \exp(A_T t)$ alapmátrix is igen egyszerű, mivel a mátrix–exponenciális függvény is diagonális:

¹¹³ T $n \times n$ méretű, nem szinguláris mátrix. Meghatározásához használható MATLAB függvények:

$[AT, BT, CT, DT, T] = \text{canon}(A, B, C, D)$; $[V, AT] = \text{eig}(A)$, $T = \text{inv}(V)$

¹¹⁴ Az $n \times n$ négyzetes mátrix diagonális, ha a főátlójában lévő elemek kivételével minden eleme zérus.

¹¹⁵ A TAT^{-1} kanonikus transzformációt az irányíthatóság, és a megfigyelhetőség témakörök tárgyalásakor részletezzük.

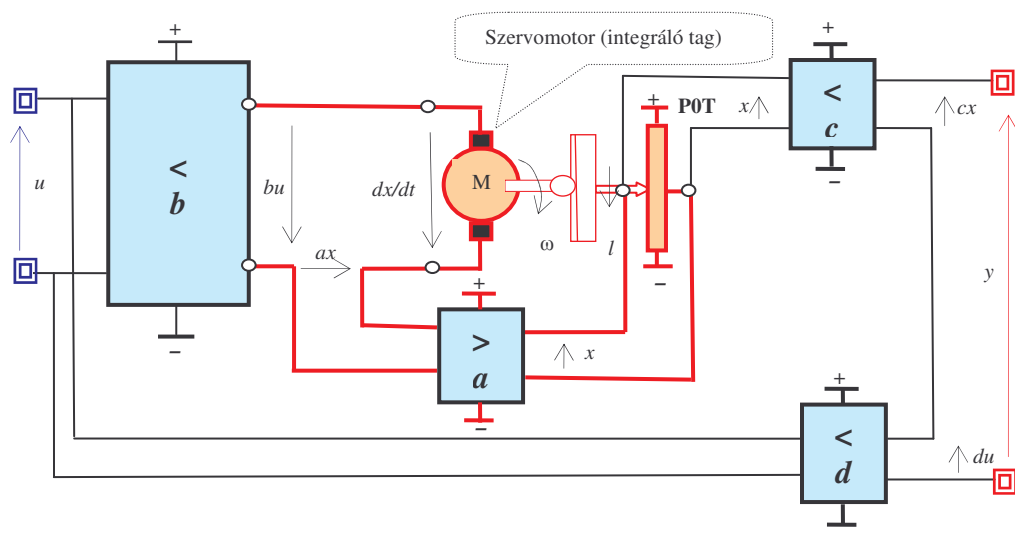
$$A_r = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} a_{T11} & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{Tii} & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{Tnn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_i t} & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Ebben a λ_i értékek az eredeti rendszer A állapotmátrixának az egymástól különböző sajátértékei. Az átalakítás kulcsa a T transzformáció alkalmas megválasztása. A T mátrixot az A állapotmátrix sajátvektoraiból lehet felépíteni, meghatározásához a MATLAB hatékony támogatást nyújt ($[AT, BT, CT, DT, T] = \text{canon}(A, B, C, D)$;).

Megjegyzés

Az elsőrendű állapotegyenletnek megfelelő szerkezeti-áramköri kapcsolási vázlatot adunk meg (illusztráció céljából) a következő ábrán. Ebben az elektronikus erősítők az a, b, c, d átviteli tényezővel rendelkező időkésés nélküli arányos tagokat realizálnak, az állandó gerjesztésű szervomotor pedig az integráló tagot jeleníti meg. A P0T potenciométer csúszkájának l elmozdulása a motor armatúra tekercsének kapcsain lévő feszültség integráljával arányos. Ennek az elrendezésnek a tulajdonságai (addig amíg valamelyik erősítő telítésbe nem kerül, vagy a potenciométer csúszkája fel nem ütközik), hasonlóak a hatásvázlatával jellemzett elsőrendű lineáris rendszer tulajdonságaihoz.



F26. ábra

Elsőrendű lineáris rendszer állapotegyenletének elektromechanikus szerkezeti illusztrációja

A kapcsolási vázlat alapján egyszerűen nyomon követhető például az a jelenség, ahogy a bemenetre kapcsolt u_0 hatására az $y(t)$ változik. Ha a kapcsolás időpillanatában a P0 potenciométer közepén állt (ez felel meg az $x(0)=0$ kezdeti feltételnek), akkor a $t=0$ időpontban $cx(0)=ax(0)=0$, $y(0)=0+du_0$, illetve $[dx(t)/dt]_{t=0}=bu_0$. A $bu_0>0$ feszültség hatására a motor forogni kezd, és ezért a potenciométer csúszkájának l elmozdulása jön létre. Ha ez az elmozdulás a motor kapcsain lévő feszültséget csökkenti – vagyis a visszacsatolás negatív –, akkor a motor forgása a kapcsain lévő feszültségnek a $bu_0+ax_0=0$ értékének elérésekor leáll, ekkor, pedig $x_0=-a^{-1}bu_0$. Az állandósult állapotban tehát az y_0 kimenő feszültség értéke: $y_0=cx_0+du_0=(-ca^{-1}b+d)u_0$. Ekkor a rendszer önbeálló.

Teljesen más jelenség alakul ki $a=0$ (nincs az integráló tag visszacsatolva), vagy $a>0$ (az integráló tag pozitívan van visszacsatolva) paraméterek mellett. Mindkét esetben az önbeállóság megszűnik, $a=0$ mellett az ugrásválasz időben lineárisan –, $a>0$ mellett, pedig időben exponenciálisan növekszik, mindaddig, amíg a működési tartományban vagyunk.